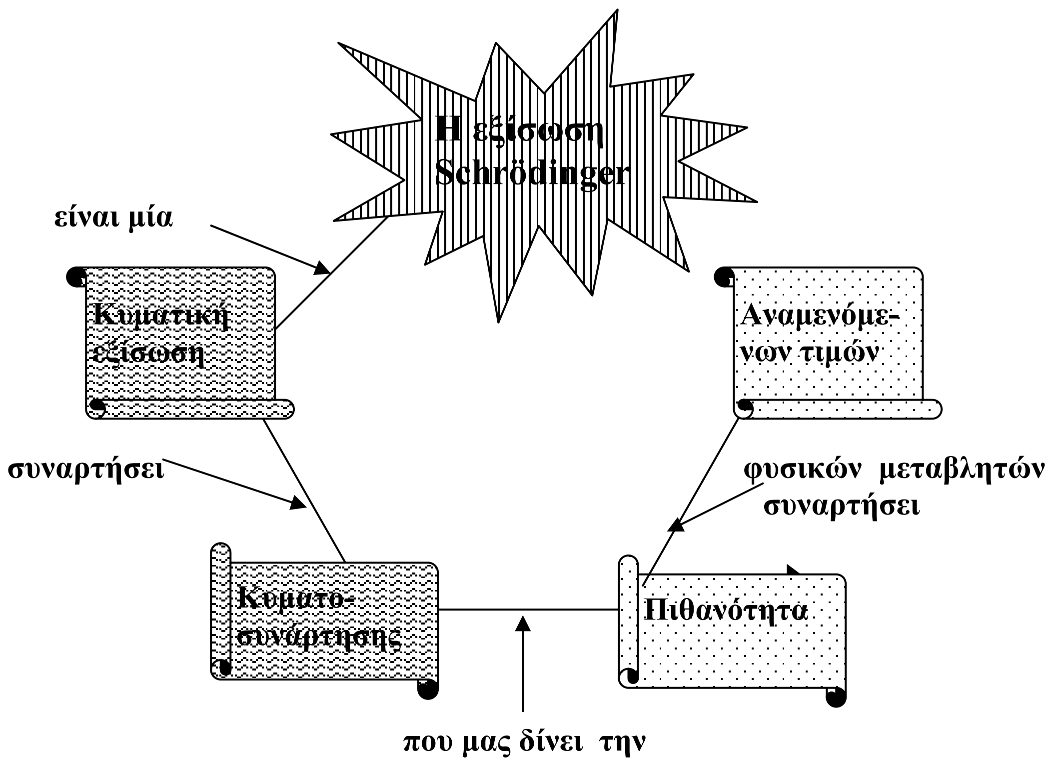
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ



ΟΥΡΑΝΙΑΣ ΧΡΥΣΑΦΙΝΟΥ
ΑΠΟΣΤΟΛΟΥ ΜΠΟΥΡΝΕΤΑ
ΕΥΤΥΧΙΑΣ ΒΑΓΓΕΛΑΤΟΥ

ΑΘΗΝΑ, 2006

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 4
Ανισότητες-Συγκλίσεις- Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Κεφάλαιο 5
Εκτιμητική

Κεφάλαιο 6
Έλεγχοι Υποθέσεων

Παράρτημα
Πίνακες Πιθανοτήτων

Πρόλογος

Οι παρούσες διδακτικές σημειώσεις απευθύνονται σε φοιτητές τμημάτων της Σχολής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Αθηνών, εκτός του τμήματος Μαθηματικών. Έχουν σκοπό να καλύψουν εισαγωγικές έννοιες της Θεωρίας Πιθανοτήτων, έτσι ώστε οι φοιτητές να προχωρήσουν άμεσα ή και ταυτόχρονα στην κατανόηση βασικών στοιχείων της Στατιστικής που ακολουθούν. Ο λόγος είναι, ότι οι Στατιστικές Μέθοδοι είναι απαραίτητες στη διεξαγωγή εργαστηρίων, στα οποία καλούνται οι φοιτητές να εκπαιδευθούν σχεδόν με την έναρξη των σπουδών τους. Επισημαίνουμε ότι περισσότερη μελέτη και εμβάθυνση σε θέματα Πιθανοτήτων και Στατιστικής είναι απαραίτητα για την κατανόηση μαθημάτων προχωρημένων εξαμήνων, καθώς και μεταπτυχιακών μαθημάτων. Η σχετική βιβλιογραφία που παρέχεται στο τέλος των Σημειώσεων ελπίζουμε να φανεί χρήσιμη για τους παραπάνω σκοπούς που αναφέραμε.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε την έννοια της πιθανότητας, σχετικές χρήσιμες προτάσεις, την έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας, της ανεξαρτησίας, καθώς και τα Θεωρήματα Ολικής Πιθανότητας και Bayes. Επίσης, αναπτύσσονται τα απαραίτητα στοιχεία Συνδυαστικής Ανάλυσης που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό πιθανοτήτων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσεται η έννοια της Τυχαίας Μεταβλητής, της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής και της Κατανομής Συνάρτησης Τυχαίας Μεταβλητής. Αναφέρονται οι πιο σημαντικές ιδιότητές τους χωρίς αποδείξεις. Η κατανομή συνάρτησης τυχαίας μεταβλητής μελετάται σε απλές περιπτώσεις που μας καλύπτουν για τις ανάγκες ορισμού στατιστικών συναρτήσεων. Ορίζονται οι παράμετροι κατανομών με έμφαση στη μέση τιμή και τη διασπορά, καθώς και στις ιδιότητες τους. Οι πιο σημαντικές από άποψη εφαρμογών Διακριτές και Συνεχείς κατανομές αναπτύσσονται διεξοδικά.

Σε πολλές εφαρμογές απαιτείται η μελέτη δύο ή και περισσοτέρων τυχαίων μεταβλητών από κοινού. Το τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται στις Διδιάστατες Τυχαίες Μεταβλητές. Η περίπτωση της πολυδιάστατης τυχαίας μεταβλητής αποτελεί σχεδόν άμεση γενίκευση της διδιάστατης. Παρουσιάζονται τα προβλήματα που προκύπτουν από την από κοινού μελέτη δύο τυχαίων μεταβλητών, οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομών, οι δεσμευμένες συναρτήσεις κατανομών και οι κατανομές συναρτήσεων δύο τυχαίων μεταβλητών που είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για τις στατιστικές συναρτήσεις. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην παρουσίαση της συνδιακύμανσης και της συσχέτισης, καθώς και στις ευθείες γραμμικής παλινδρόμισης. Η διδιάστατη Κανονική και Πολυωνυμική κατανομή παρουσιάζονται αναλυτικά λόγω της σημαντικότητάς τους στις εφαρμογές.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε τις ανισότητες Markov και Chebyshev και ορίζουμε το δειγματικό μέσο. Στη συνέχεια επιχειρείται μια απλή προσέγγιση στη στοχαστική σύγκλιση με σκοπό την παρουσίαση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος, το οποίο είναι υψίστης σημασίας για ό,τι διαπραγματεύεται η θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστικής.

Τα επόμενα κεφάλαια αφορούν στη Στατιστική. Στο πέμπτο κεφάλαιο ασχολούμαστε με προβλήματα εκτίμησης παραμέτρων κατανομών, όπως της μέσης τιμής και διασποράς. Η έννοια της σημειακής εκτίμησης αναπτύσσεται και αναλύονται οι ιδιότητες εκείνες των εκτιμητριών που κατοχυρώνουν μια "καλή" εκτίμηση, καθώς και οι κύριες μέθοδοι προσδιορισμού τους. Στη συνέχεια αναλύεται η έννοια του διαστήματος εμπιστοσύνης που μας δίνει εκτίμηση μιας παραμέτρου σε ένα διάστημα για δειγματοληψίες από πληθυσμούς Κανονικής, Εκθετικής, Poisson και Διωνυμικής κατανομής.

Το έκτο κεφάλαιο διαπραγματεύεται τους Στατιστικούς Ελέγχους Υποθέσεων που αφορούν στις παραμέτρους των κατανομών ενός ή δύο δειγμάτων. Απαραίτητη προϋπόθεση για την εφαρμογή τους είναι τα δείγματα να προέρχονται από πληθυσμούς που ακολουθούν την Κανονική κατανομή ή τα μεγέθη των δειγμάτων να είναι αρκετά μεγάλα. Αρχικά περιγράφονται έλεγχοι υποθέσεων για τη μέση τιμή και τη διασπορά της κατανομής ενός δείγματος, καθώς και για το ποσοστό επιτυχίας p της κατανομής Bernoulli. Στη συνέχεια παρουσιάζονται έλεγχοι υποθέσεων για τις παραμέτρους των κατανομών δύο ανεξάρτητων δειγμάτων.

Οι έλεγχοι υποθέσεων που περιγράφονται στο έκτο κεφάλαιο βασίζονται σε παραμετρικά κριτήρια επιλογής. Υπάρχουν όμως και έλεγχοι που στηρίζονται στη χρήση απαραμετρικών κριτηρίων, δηλαδή κριτηρίων που η κατανομή τους δεν εξαρτάται από την κατανομή των δεδομένων. Ένα γνωστό απαραμετρικό κριτήριο είναι το τεστ X^2 που προτάθηκε από τον Pearson το 1900 και το οποίο αποτελεί αντικείμενο μελέτης του έβδομου κεφαλαίου. Συγκεκριμένα περιγράφεται ο τρόπος εφαρμογής του κριτηρίου X^2 σε τρεις ειδικές περιπτώσεις ελέγχων υποθέσεων. Στην πρώτη περίπτωση μας ενδιαφέρει να ελέγξουμε αν τα δεδομένα μας προσαρμόζονται ικανοποιητικά σε μία συγκεκριμένη κατανομή (έλεγχος καλής προσαρμογής). Στη δεύτερη περίπτωση θέλουμε να εξετάσουμε αν υπάρχει σχέση μεταξύ δύο χαρακτηριστικών ενός πληθυσμού (έλεγχος ανεξαρτησίας). Τέλος, στην τρίτη περίπτωση μας ενδιαφέρει να ελέγξουμε αν δύο ή περισσότερα δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό (έλεγχος ομογένειας).

Στο όγδοο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στη βασική θεωρία και τις εφαρμογές της απλής γραμμικής παλινδρόμησης για την ανάλυση των παραγόντων που επηρεάζουν τις διακυμάνσεις μιας τυχαίας μεταβλητής. Αναπτύσσουμε το βασικό στατιστικό μοντέλο της γραμμικής παλινδρόμησης και τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων για την εκτίμηση των παραμέτρων. Επίσης εισάγουμε την έννοια του συντελεστή προσδιορισμού για την αξιολόγηση της ερμηνευτικής ικανότητας του μοντέλου. Τέλος, κάτω από την υπόθεση της κανονικότητας, αναλύουμε τις στατιστικές ιδιότητες των εκτιμήσεων, γεγονός που επιτρέπει τον υπολογισμό διαστημάτων εμπιστοσύνης και ελέγχους στατιστικής σημαντικότητας του μοντέλου παλινδρόμησης.

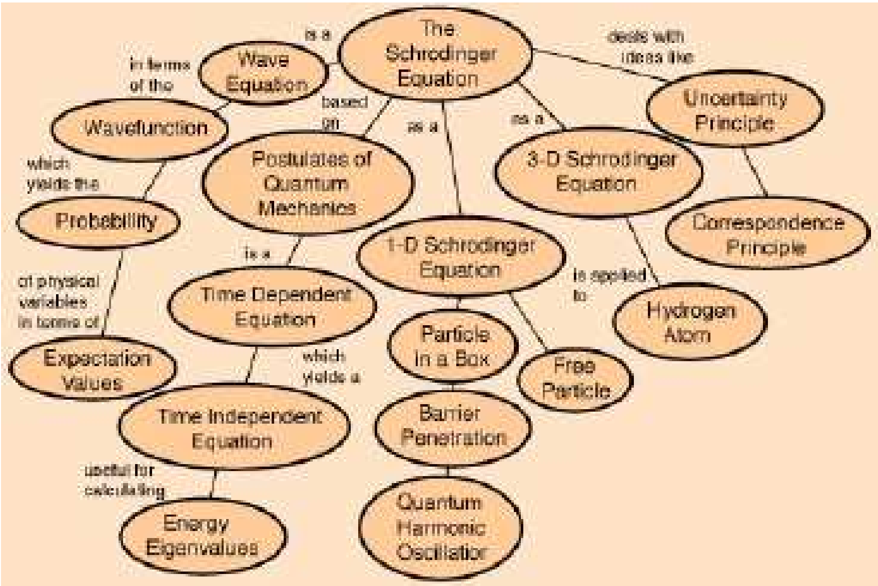
Σε κάθε κεφάλαιο δίνονται αρκετά παραδείγματα και συχνά χρησιμοποιούνται για να καταλήξουμε σε κάποιο θεωρητικό αποτέλεσμα προκειμένου να αποφύγουμε σχετικές αποδείξεις. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου δίνονται ασκήσεις τις οποίες παροτρύνεται ο αναγνώστης να λύσει για καλύτερη εμπέδωση των σχετικών εννοιών του κεφαλαίου.

Πίνακες τιμών κατανομών δίνονται στο παράρτημα, καθώς και σχετική βιβλιογραφία.

Στο πρώτο κεφάλαιο αναφέρονται μερικά ιστορικά στοιχεία για τη θεωρία Πιθανοτήτων. Στο σημείο αυτό θα θέλαμε να τονίσουμε ότι παρότι το αρχικό κίνητρο της ενασχόλησης με τη θεωρία αυτή ήταν τα τυχερά παιχνίδια πολύ γρήγορα έγινε κατανοητό ότι πολλά φυσικά φαινόμενα με στοιχεία τυχαιότητας θα μπορούσαν να μελετηθούν χρησιμοποιώντας μαθηματικά μοντέλα της θεωρίας Πιθανοτήτων. Η θεωρία του Einstein για την Κίνηση Brown στις αρχές του προηγούμενου αιώνα έδωσε το έναυσμα για την ραγδαία ανάπτυξη της θεωρίας Πιθανοτήτων. Σήμερα καλείται να δώσει απαντήσεις σε προβλήματα που αφορούν σχεδόν τα πάντα, από οικονομικά φαινόμενα (διακυμάνσεις τιμών χρηματιστηριακών προϊόντων), μέχρι την ανάλυση της βιολογικής ακολουθίας DNA.

Το διάγραμμα του εξωφύλλου δείχνει τη σχέση της θεωρίας Πιθανοτήτων με την εξίσωση Schrödinger που αφορά σε θέματα Κβαντομηχανικής. Το διάγραμμα που παρουσιάζεται είναι ο πρώτος από αριστερά κλάδος του διαγράμματος που φαίνεται παρακάτω και που ο αναγνώστης μπορεί επίσης να βρει και να μελετήσει στην ιστοσελίδα:

http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/quantum/schrcn.html#c1.



Ουρανία Χρυσαφίνου, Καθηγήτρια Τμήματος Μαθηματικών, Πανεπιστημίου Αθηνών

Απόστολος Μπουρνέτας, Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών, Πανεπιστημίου Αθηνών

Ευτυχία Βαγγελάτου, Λέκτορας Τμήματος Μαθηματικών, Πανεπιστημίου Αθηνών

Αθήνα, Νοέμβριος 2006

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στις Πιθανότητες

1.1 Εισαγωγικές Έννοιες

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων μελετά φαινόμενα τα οποία υπόκεινται σε τυχαιότητα ή για τα οποία αδυνατούμε να περιγράψουμε τη συμπεριφορά τους με συγκεκριμένους νόμους, όπως, για παράδειγμα, είναι ο νόμος της βαρύτητας, το αποτέλεσμα μιας συγκεκριμένης μίξης χημικών στοιχείων, οι νόμοι του Kirkov, κ.λ.π. Τέτοια φαινόμενα μπορούμε να τα αναγάγουμε σε πειράματα που ονομάζουμε πειράματα τύχης.

Παρατηρώντας ότι η επανάληψη τέτοιου είδους πειραμάτων κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες μας δίνει κάποια πληροφορία για τα αποτελέσματά τους (στατιστική κανονικότητα) προχωράμε στη μελέτη τους προσδιορίζοντας κατάλληλους κανόνες. Για να γίνει πιο κατανοητό ας αναφερθούμε σε ένα απλό πείραμα τύχης, όπως είναι η ρίψη ενός ζαριού. Ας υποθέσουμε ότι το ζάρι είναι αμερόληπτο (όχι κάλπικο). Αν ρωτηθούμε ποια είναι η πιθανότητα να εμφανισθεί "άσσος" είναι προφανές(;) ότι θα απαντήσουμε 1/6, παρά το ότι μπορεί να ρίξουμε πολλές φορές το ζάρι και να μη εμφανισθεί ο "άσσος". Το 1/6 προκύπτει από το ότι αν επαναλάβουμε τις ρίψεις του ζαριού πολλές φορές, π.χ. 1000 και καταμετρηθούν οι εμφανίσεις των ενδείξεων του, τότε θα παρατηρήσουμε ότι το ποσοστό των εμφανίσεων του "άσσου" θα κυμαίνεται γύρω από το 1/6. Το ίδιο φυσικά θα ισχύει και για τις άλλες ενδείξεις αφού θεωρήσαμε το ζάρι αμερόληπτο. Από αυτό το πολύ απλό πείραμα τύχης παρατηρούμε ότι κάτι μπορούμε να απαντήσουμε και για τα φαινόμενα που είναι μη-ντεντερμινιστικά, δηλ,. εμφανίζουν τυχαιότητα. Αυτό το σκοπό καλείται να υπηρετήσει η θεωρία Πιθανοτήτων.

Η προσέγγιση αυτής της θεωρίας θα γίνει με τρόπο απλό, χωρίς αναφορά στο καθαρά θεωρητικό, από άποψη μαθηματική, υπόβαθρό της που είναι η θεωρία

Μέτρου. Περισσότερα στοιχεία για την ανάπτυξη της θεωρίας Πιθανοτήτων παραθέτουμε στην επόμενη παράγραφο σε μια σύντομη ιστορική ανασκόπηση.

Ορισμός 1.1. Πείραμα Τύχης*είναι ένα πείραμα στο οποίο δεν ισχύει η σχέση αιτίου-αιτιατού.*

Παραδείγματα:

1. Ρίψη ενός νομίσματος δύο φορές.

2. Ρίψη ενός ζαριού.

3. Ρίψη δύο ζαριών.

4. Αριθμός ρίψεων ενός ζαριού έως ότου εμφανισθεί για πρώτη φορά η ένδειξη “6” .

5. Η απόσταση τυχαίας βολής από το κέντρο ενός μοναδιαίου κύκλου.

6. Ο χρόνος ζωής ενός chip σε ώρες.

7. Το ύψος (σε cm) μιας φοιτήτριας της σχολής θετικών επιστημών που εκλέγεται τυχαία.

Ορισμός 1.2. Δειγματικός χώρος *ενός πειράματος τύχης καλείται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος. Συνήθως το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε με Ω.*

Τα παραπάνω πειράματα τύχης έχουν τους ακόλουθους δειγματικούς χώρους αντίστοιχα:

1. $\Omega = \{KK, \Gamma\Gamma, K\Gamma, \Gamma K\}$.

2. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

3. $\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots (1,6), (2,1), (2,2), \ldots (2,6), (3,1), (3,2), \ldots (3,6), (4,1), (4,2), \ldots (4,6), (5,1), (5,2), \ldots (5,6), (6,1), (6,2), \ldots (6,6)\}$.

4. $\Omega = \{1, 2.3, \ldots, \ldots\}$.

5. $\Omega = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$.

6. $\Omega = \{x : 0 \leq x \leq \infty\}$.

7. $\Omega = \{x : 150 \leq x \leq 180\}$.

Τα πειράματα τύχης που αναφέραμε είναι απλά. Στην πραγματικότητα έχουμε να αντιμετωπίσουμε φαινόμενα που υπόκεινται σε τυχαιότητα πολλών παραγόντων και για το λόγο αυτό εμφανίζουν μεγάλη πολυπλοκότητα. Για παράδειγμα, ο αριθμός των ραδιενεργών στοιχείων που εκπέπονται από συγκεκριμένη πηγή, ο λευκός θόρυβος που αναπτύσσεται σε κανάλια μεταφοράς σημάτων, ο αριθμός των ατόμων ενός πληθυσμού (φυτών, ζώων, ανθρώπων), ο οποίος υπόκειται σε γέννηση, θάνατο, αλλαγές περιβάλλοντος, ο χρόνος εξυπηρέτησης χρηστών ενός μεγάλου ηλεκτρονικού δικτύου, η διακύμανση οικονομικών μεγεθών, όπως η διακύμανση της τιμής μιας μετοχής στο χρηματηστήριο, ο αριθμός συγκεκριμένου βιολογικού σχεδιασμού σε ακολουθία DNA, κ.λ.π.

Η θεωρία πιθανοτήτων χρησιμοποιώντας δεδομένα παρατηρήσεων ενός φαινομένου καλείται να κατασκευάσει ένα ιδεατό μαθηματικό μοντέλο με βάση το οποίο να μπορεί κανείς να προβλέψει ή να συμπεράνει αποτελέσματα δυνατά να παραχθούν από το φαινόμενο. Οι απαντήσεις που λαμβάνονται με τη χρησιμοποίηση του μαθηματικού μοντέλου πρέπει να συγκρίνονται με πραγματικά δεδομένα για να ελέγχεται κατά πόσο το μοντέλο περιγράφει καλά το φαινόμενο. Αυτό το σημαντικό ρόλο αναλαμβάνει να επιτελέσει η Στατιστική, όπως θα δούμε στα σχετικά κεφάλαια.

Προς το παρόν χρησιμοποιούμε τα απλά παραδείγματα που αναφέραμε ή άλλα παρόμοια για να προχωρήσουμε στη εισαγωγή βασικών εννοιών της θεωρίας πιθανοτήτων.

Ορισμός 1.3. *Ο Δειγματικός χώρος που περιέχει πεπερασμένο αριθμό στοιχείων ή το πολύ αριθμήσιμο καλείται* **Διακριτός**.
Ο Δειγματικός χώρος που περιέχει μη αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων καλείται **Συνεχής**.

Οι δειγματικοί χώροι των παραδειγμάτων 1, 2, 3, 4 είναι διακριτοί. Οι τρεις πρώτοι αποτελούνται από πεπερασμένο αριθμό στοιχείων ο τέταρτος από αριθμήσιμο πλήθος.Οι δειγματικοί χώροι των παραδειγμάτων 5, 6 και 7 είναι συνεχείς.

Ορισμός 1.4. *Ένα υποσύνολο του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης καλείται* **ενδεχόμενο**.
Το ενδεχόμενο που αποτελείται από όλα τα δυνατά αποτελέσματα, δηλ. το Ω καλείται **βέβαιο** .
Το ενδεχόμενο που δεν περιέχει κανένα από τα αποτελέσματα του δειγματικού χώρου, δηλ. το $\emptyset$, καλείται **αδύνατο**, *ενώ αυτό που περιέχει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα καλείται* **στοιχειώδες**.

Συνήθως τα ενδεχόμενα τα συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα, π.χ. Α, Β, Γ, .Αναφέρουμε μερικά ενδεχόμενα που αφορούν τα παραδείγματα 1-7 χρησιμοποιώντας τα στοιχειώδη ενδεχόμενα που τα αποτελούν, καθώς και τις αντίστοιχες προτάσεις που τα περιγράφουν.
1. Έστω τα ενδεχόμενα $A = \{KK, K\Gamma, \Gamma K\}$, $B = \{K\Gamma, \Gamma K\}$, $\Gamma = \{\Gamma\Gamma, K\Gamma, \Gamma K\}$, $\Delta = \{KKK\}, E = \Omega$.
Μπορούμε να διατυπώσουμε τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ, Δ και Ε με λόγια ως εξής:
Α=“εμφανίζεται **τουλάχιστον** μία κεφαλή”, Β=“εμφανίζεται **ακριβώς** μία κεφαλή”, Γ=“εμφανίζεται **το πολύ** μία κεφαλή”, Δ=“ το αδύνατο ενδεχόμενο”, Ε=“το βέβαιο γεγονός”.
Μπορούν να διατυπωθούν τα παραπάνω ενδεχόμενα διαφορετικά? αν ναι ποιά και πως?

2. Έστω τα ενδεχόμενα $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3, 6\}$, $\Gamma = \{3, 4, 5, 6\}$.
Τα Α, Β, Γ, μπορούμε να τα διατυπώσουμε ως εξής:
Α=“ εμφανίζεται αριθμός περιττός”, Β=“ εμφανίζεται αριθμός διαιρετός με το 3”, Γ=“ εμφανίζεται αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 3”.

3. $A = \{(1, 1),)(2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$, $B = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$, $\Gamma = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.
Τα Α, Β, Γ διατυπώνονται ως εξής:
Α=“:εμφανίζεται ο ίδιος αριθμός και στις δύο ρίψεις”, Β=“ εμφανίζεται το 6 ακριβώς μία φορά”, Γ=“ οι αριθμοί που εμφανίζονται είναι μικρότεροι ή ίσοι με το 2”.

4. Έστω τα ενδεχόμενα Α=“ απαιτούνται το πολύ 10 ρίψεις του ζαριού έως ότου εμφανισθεί το 6”, Β=“ απαιτούνται ακριβώς 12 ρίψεις”, Γ=“ απαιτούνται τουλάχιστον 5 ρίψεις” και Δ=“ εμφανίζεται το 6 σε άρτιο αριθμό ρίψεων.
Τα Α, Β, Γ, Δ αποτελούνται από τα εξής στοιχεία του δειγματικού χώρου:
$A = \{1, \ldots, 10\}$, $B = \{12\}$, $\Gamma = \{5, 6, \ldots, \ldots\}$, $\Delta = \{2, 4, 6, \ldots, 2\kappa \ldots, \}$.

5. Έστω τα ενδεχόμενα Α=“ η βολή απέχει από το στόχο το πολύ 1/3”, Β=“η βολή απέχει από το στόχο τουλάχιστον 2/3” και Γ=“ η βολή απέχει από το

στόχο περισσότερο από 1/4 και λιγώτερο από 3/4".
Στην περίπτωση αυτή τα Α, Β, Γ μπορούν να περιγραφούν ως εξής:
$A = \{x : 0 < x < 1/3\}, \quad B = \{x : 2/3 \leq x < 1\}, \quad \Gamma = \{x : 1/4 < x < 3/4\}.$

6. Έστω τα ενδεχόμενα Α=" το chip ζει τουλάχιστο χίλιες ώρες", Β=" το chip ζει περισσότερο από 1500 ώρες και λιγότερο από 5000 ώρες" και Γ=" το chip ζει το πολύ 10000 ώρες".
Ισοδύναμη διατύπωση είναι
$A = \{x : x \geq 1000\}, B = \{1500 < x < 5000\}, \Gamma = \{x : 0 < x \leq 10000\}.$

7. $A = \{x : 165 \leq x\}, B = \{x : 160 \leq x \leq 170\}$. Προφανώς τα Α και Β διατυπώνονται ως εξής: Α="η φοιτήτρια έχει ύψος μεγαλύτερο ή ίσο των 165 cm " και Β=" το ύψος της φοιτήτριας κυμαίνεται μεταξύ των 160 cm και 170 cm".

Στα παραδείγματα 5, 6 και 7 τα σύμβολα $\leq, \geq$ μπορούν να αντικατασταθούν με $<, >$ και αντίστροφα, αφού ο δειγματικός μας χώρος είναι συνεχής. Αυτό θα διευκρινισθεί στο δεύτερο κεφάλαιο. Για παράδειγμα, το ενδεχόμενο Α στο 5 μπορεί να γραφεί $A = \{x : 0 < x < 1/3\} = \{x : 0 < x \leq 1/3\}$, το ενδεχόμενο Α στο 6 μπορεί να γραφεί $A = \{x : x \geq 1000\} = \{x : x > 1000\}$ και το Α στο 7 μπορεί να γραφεί $A = \{x : 165 \leq x\} = \{x : x \geq 165\} = \{x : x > 165\}$.

Παρατηρούμε ότι στη διατύπωση ενδεχομένων πολλές φορές εμφανίζονται εκφράσεις όπως, **τουλάχιστον, το πολύ, ακριβώς, από ... έως** , οι οποίες είναι ισοδύναμες με συγκεκριμένες μαθηματικές φόρμες, όπως φαίνεται και από τα παραπάνω παραδείγματα. Στη συνέχεια θα δούμε ότι εκφράζονται και με πράξεις συνόλων, αφού ο δειγματικός χώρος Ω είναι ένα σύνολο και τα ενδεχόμενα είναι υποσύνολά του. Μερικές βασικές τέτοιες πράξεις αναφέρουμε στη συνέχεια.
Ένωση δύο ενδεχομένων, έστω Α, Β, είναι όλα τα στοιχεία του Ω που ανήκουν σε τουλάχιστον ένα από αυτά. Συμβολίζεται με $A \cup B$.

Τομή δύο ενδεχομένων, έστω Α, Β, είναι όλα τα στοιχεία του Ω που ανήκουν και στα δύο ενδεχόμενα. Συμβολίζεται με $A \cap B$ ή απλά ως AB.
Ξένα καλούνται τα ενδεχόμενα Α, Β αν $A \cap B = \emptyset$.

Συμπλήρωμα του ενδεχομένου Α ως προς το Ω είναι το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία του Ω που **δεν** ανήκουν στο Α. Συμβολίζεται με A' ή A^c.

Διαφορά του συνόλου Β από το Α είναι όλα τα στοιχεία του Α που δεν ανήκουν στο Β και συμβολίζεται με Α-Β. Είναι

$$A - B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A, \ \omega \text{ δεν} \in \ B\}$$

Ιχύουν οι ακόλουθες προφανείς σχέσεις

$$A' = \Omega - A, A - B = A \cap B'$$

Η άλγεβρα των ενδεχομένων προσδιορίζεται από τους εξής νόμους ή αξιώματα: Έστω τα ένδεχόμενα Α, Β και Γ με δειγματικό χώρο Ω

Αντιμεταθετικότητα:

$$A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$$

Προσεταιριστικότητα:

$$A \cup (B \cup \mathit{\Gamma}) = (A \cup B) \cup \mathit{\Gamma}$$

$$A \cap (B \cap \mathit{\Gamma}) = (A \cap B) \cap \mathit{\Gamma}$$

Επιμεριστικότητα:

$$A \cup (B \cap \mathit{\Gamma}) = (A \cup B) \cap (A \cup \mathit{\Gamma})$$

$$A \cap (B \cup \mathit{\Gamma}) = (A \cap B) \cup (A \cap \mathit{\Gamma}).$$

Ταυτοτικότητα

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \Omega = A.$$

Συμπληρωματικότητα

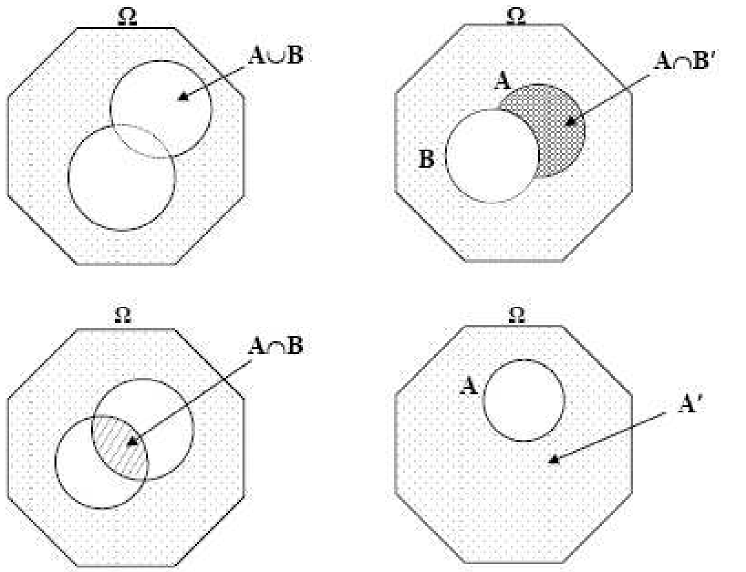
$$A \cup A' = \Omega, \quad A \cap A' = \emptyset, \quad \Omega' = \emptyset, \quad \emptyset' = \Omega, \quad (A')' = A.$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω μπορούν να αποδειχθούν οι εξής πολύ χρήσιμες σχέσεις:

Κανόνες De Morgan

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = (A' \cup B')$$

Τα διαγράμματα Venn που φαίνονται στο Σχήμα 1.1 βοηθούν στην κατανόηση όλων των παραπάνω σχέσεων.



Σχήμα 1.1: Παραδείγματα Διαγραμμάτων Venn

1.2 Αξιωματική Θεμελίωση

Σύντομη Ιστορική Ανασκόπιση

Η έννοια της πιθανότητας και η μέτρηση της άρχισε να απασχολεί τους ανθρώπους μόλις κατά το πρώτο μισό του 17ου αιώνα. Μέχρι τότε θεωρούσαν την πιθανότητα ως τύχη που μπορεί να είναι καλή ή κακή ανάλογα με τη θρησκευτική και πολιτιστική τους κουλτούρα και πίστη. Για παράδειγμα, οι αρχαίοι Έλληνες εναπόθεταν τις ελπίδες τους στο να κερδίσουν στα τυχερά παιχνίδια που έπαιζαν στην εύνοια των θεών τους. Στην αρχή του 17ου αιώνα Ιταλοί χαρτοπαίκτες ζήτησαν τη βοήθεια του Γαλιλαίου για να εξηγήσουν τις απορίες τους που αφορούσαν τυχερά παιχνίδια με ζάρια. Ο Γαλιλαίος παρά το ότι ήταν πολύ απασχολημένος με τα δικά του προβλήματα ασχολήθηκε με τα προβλήματά τους και έγραψε ένα μικρό εγχειρίδιο που αφορούσε σε τέτοιου είδους προβλήματα.

Μερικά χρόνια αργότερα ένας Γάλλος Μαθηματικός και παίκτης ο Chevalier de Mere άρχισε να αλληλογραφεί με τον μαθηματικό Blaise Pascal θέτοντας του διάφορα προβλήματα όπως το ακόλουθο: Τι είναι συμφερότερο; “να στοιχηματίσω στην εμφάνιση τουλάχιστον ενός 6 κατά την ρίψη ενός ζαριού 4 φορές ή να στοιχηματίσω στην εμφάνιση τουλάχιστον ενός (6,6) κατά την ρίψη 2 διακεκριμένων ζαριών 24 φορές;". Ο Pascal θεώρησε τα προβλήματα του de Mere ενδιαφέροντα και άρχισε να αλληλογραφεί με τον Piere Fermat, επίσης μαθηματικό, προκειμένου να τα αντιμετωπίσουν από κοινού . Η συνεργασία των δύο φημισμένων μαθηματικών όχι μόνο οδήγησε στη λύση των προβλημάτων του de Mere, αλλά δημιούργησε σειρά πολλών ερωτημάτων και άλλων συναφών προβλημάτων. Υπήρξε έντονο ενδιαφέρον από πολλούς μαθηματικούς της εποχής τους, όπως ο νεαρός τότε Ολλανδός Μαθηματικός Ludwig Huyghens, ο οποίος ταξίδεψε στο Παρίσι για να ενημερωθεί ειδικά για τα προβλήματα των τυχερών παιχνιδιών και για τη νέα μαθηματική θεωρία που ανέτειλε. Πράγματι, τα αποτελέσματα της συνεργασίας μεταξύ Pascal και Fermat οδήγησαν στη γέννηση της θεωρίας Πιθανοτήτων.

Η πρώτη αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας πιθανοτήτων οφείλεται στον Laplace (1812) και στηρίζεται στον ορισμό της κλασικής πιθανότητας που έγινε από τον De Moivre (1711) και έχει ως εξής: Έστω ένα πείραμα τύχης του οποίου ο δειγματικός χώρος Ω είναι πεπερασμένος και κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο, δηλ. κάθε στοιχείο του Ω είναι εξίσου πιθανό λόγω έλλειψης επαρκούς λόγου για το αντίθετο (π.χ. για ένα αμερόληπτο ζάρι θεωρούμε ότι όλες οι ενδείξεις $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ είναι εξίσου πιθανές να εμφανισθούν σε μία τυχαία ρίψη του) . Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A συμβολίζεται με $P(A)$ και ισούται με το πηλίκο που έχει αριθμητή τον αριθμό των στοιχείων του A και παρανομαστή το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος τύχης, δηλ. τον πληθικό αριθμό του Ω. Αφού ο δειγματικός χώρος Ω είναι πεπερασμένος, ο χώρος ενδεχομένων, έστω $\mathcal{A}$, συμπίπτει με το δυναμοσύνολο του Ω, το οποίο συμβολίζουμε με $\mathcal{D}\ (\Omega)$ και αποτελείται από όλα τα δυνατά υποσύνολα του Ω. Ο Laplace καθόρισε τα παρακάτω αξιώματα, τα οποία βασίζονται στην κοινή λογική, τα αποτελέσματα πειραμάτων και τη διαίσθηση:
Η $P(A)$ είναι μία συνολοσυνάρτηση που πληρεί τα ακόλουθα αξιώματα:

α1: Είναι $P(A) \geq 0\ \forall A \in \mathcal{D}\ (\Omega)$.

α2: $P(\Omega) = 1$.

α3: Είναι $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, $\forall A, B \in \mathcal{D}\ (\Omega)$, που είναι τέτοια ώστε $A \cap B = \emptyset$, δηλ. τα A, B είναι ξένα ενδεχόμενα.

Οι συνθήκες του πεπερασμένου δειγματικού χώρου και των ισοπίθανων στοιχειωδών ενδεχομένων ήταν πολύ περιοριστικές για τις εφαρμογές. Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον παραπάνω ορισμό της πιθανότητας αν θέλουμε να παρατηρήσουμε τον αριθμό των ραδιενεργών σωματιδίων που εκπέμπονται από μια ραδιενεργό πηγή, αφού ο δειγματικός χώρος αποτελείται από άπειρο πλήθος στοιχείων. Δεν μπορούμε να μελετήσουμε πιθανότητα που αφορά στο χρόνο ζωής ενός chip , αφού ο δειγματικός χώρος είναι μή αριθμήσιμος. Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε πιθανότητα ενδεχομένου για το πιο απλό πείραμα τύχης όπως είναι η ρίψη ενός νομίσματος αν αυτό δεν είναι αμερόληπτο που εξασφαλίζει το ισοπίθανο.

Οι παραπάνω δυσκολίες αίρονται κατά κάποιο τρόπο με το ορισμό της πιθανότητας που έδωσε ο Von Mises (1928), ο οποίος διατυπώνεται ως εξής:
Ένα πείραμα τύχης επαναλαμβάνεται ν φορές κάτω από τις ίδιες ακριβώς συνθήκες και έστω ότι σε κάθε πείραμα παρακολουθούμε αν εμφανίζεται ένα συγκεκριμένο ενδεχόμενο A. Υποθέτοντας ότι ο αριθμός εμφανίσεων του A είναι α_ν η πιθανότητα του A ορίζεται από τη σχέση

$$P(A) = lim_{\nu \to \infty} \frac{\alpha_\nu}{\nu}$$

δηλ. η πιθανότητα του ενδεχομένου A είναι η οριακή σχετική συχνότητα εμφάνισής του.

Είναι φανερό ότι τα αξιώματα α1 - α3 που έθεσε ο Laplace ικανοποιούνται. Δημιουργούνται όμως άλλα προβλήματα όπως: Πόσες φορές μπορούμε να επαναλάβουμε ένα πείραμα τύχης κάτω από ίδιες ακριβώς συνθήκες? Επίσης, το όριο έχει δυσκολίες που δεν μπορούμε να αναπτύξουμε στην παρούσα φάση. Μπορούμε να έχουμε στο μυαλό μας το όριο αυτό ως το νόμο των μεγάλων αριθμών, στον οποίο θα αναφερθούμε στο κεφάλαιο 4.

Το 1933, ο Ρώσος μαθηματικός A. Kolmogorov παρουσίασε την αξιωματική θεμελίωση των πιθανοτήτων που αίρει όλες τις αδυναμίες των προηγούμενων σχετικών ορισμών. Η θεμελίωση αυτή έχει ως βάση τη θεωρία μέτρου και αφορά στα μετρήσιμα ενδεχόμενα. Τα ενδεχόμενα που αφορούν πρακτικές εφαρμογές και έχουν ενδιαφέρον είναι μετρήσιμα, έτσι αυτός ο περιορισμός δεν μας δημιουργεί πρόβλημα στην όχι τόσο θεωρητική ανάπτυξη της σχετικής θεωρίας που επιχειρείται στο βιβλίο αυτό.

Έστω ένα πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο Ω. Για κάθε ενδεχόμενο A ($A \subset \Omega$) υποθέτουμε ότι ένας αριθμός $P(A)$ ορίζεται και ικανοποιεί τα εξής τρία αξιώματα:

A1. $P(A) \geq 0 \quad \forall A.$

A2. $P(\Omega) = 1.$

A3. $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$, για όλα τα ενδεχόμενα A_i, A_j, τέτοια ώστε $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i, j = 1, 2, \ldots$, δηλ. ξένα μεταξύ τους.

Το πρώτο αξίωμα λέει ότι η πιθανότητα “το αποτέλεσμα του πειράματος είναι ένα στοιχείο του A” είναι ένας αριθμός μη αρνητικός. Το δεύτερο αξίωμα δηλώνει ότι με πιθανότητα ένα το αποτέλεσμα του πειράματος ανήκει στο δειγματικό χώρο Ω και το τρίτο ότι για κάθε ακολουθία ξένων μεταξύ τους ενδεχομένων η πιθανότητα τουλάχιστον ένα από αυτά να συμβεί είναι το άθροισμα των αντιστοίχων πιθανοτήτων.

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι η πιθανότητα είναι μία συνάρτηση ή συνολοσυνάρτηση, έστω $P(.)$, που ορίζεται στο σύνολο ενδεχομένων και παίρνει τιμές στο $[0,\ 1]$. Αν θεωρήσουμε την ακολουθία ενδεχομένων $A_1, A_2, \dots$, όπου $A_1 = A$ $A_i = \emptyset$, $i > 1$, τότε έχουμε $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ και το τρίτο αξίωμα μας δίνει

$$P(A) = P(A) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset),$$

ή

$$P(\emptyset) = 0. \tag{1.1}$$

Η τελευταία σχέση σε συνδυασμό με το τρίτο αξίωμα μας δίνει τη σχέση

$$P(\cup_{n=1}^{k} A_n) = \sum_{n=1}^{k} P(A_n) \tag{1.2}$$

για όλα τα ενδεχόμενα A_i, A_j, τέτοια ώστε $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i, j = 1, 2, \dots, k$, δηλ. ξένα μεταξύ τους, αφού είναι

$$\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{k} A_n + \cup_{n=k+1}^{\infty} \emptyset = \cup_{n=1}^{k} A_n + \emptyset.$$

Το σύνολο ενδεχομένων, έστω $\mathcal{A}$, είναι μία σ-άλγεβρα, δηλ. είναι ένα σύνολο που έχει τις εξής ιδιότητες:

I1: $\Omega \in \mathcal{A}$

I2: Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε και $A' \in \mathcal{A}$

I3: Αν $A_n \in \mathcal{A}$, $\ n = 1, 2, \dots$, τότε και $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Η τριάδα $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}(.))$ καλείται **χώρος πιθανότητας**.

Ο αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας από τον Kolmogorov, που στηρίχτηκε στους προηγούμενους ορισμούς, κάλυψε όλα τα κενά τους και αποτέλεσε το θεμέλιο για την ανάπτυξη της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Στη συνέχεια, όπου έχουμε τις συνθήκες του Laplace θα χρησιμοποιούμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας.

Χρησιμοποιώντας τα αξιώματα Α1, Α2, Α3 και την άλγεβρα ενδεχομένων μπορούμε να δείξουμε πολλές χρήσιμες σχέσεις που αφορούν σε πιθανότητες ενδεχομένων, όπως φαίνεται στη συνέχεια.

Για συντομία στο εξής θα γράφουμε AB αντί για $A \cap B$, δηλ. είναι $AB \equiv A \cap B$.

Πρόταση 1.1. *Ισχύουν οι σχέσεις*

$$P(A') = 1 - P(A),\ \forall A \in \mathcal{A}. \tag{1.3}$$

Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A, B ισχύει η σχέση

$$P(A'B) = P(B) - P(AB) \tag{1.4}$$

Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A, B ισχύει η σχέση

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{1.5}$$

Είναι

$$P(A) \leq 1,\ \forall A \in \mathcal{A} \tag{1.6}$$

Τέλος, η πιθανότητα P(.) είναι αύξουσα συνολοσυνάρτηση, δηλ. αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$.

Απόδειξη

Είναι $A \cup A' = \Omega$ και $AA' = \emptyset$. Από τα Α2 και (2) έχουμε $P(A \cup A') = P(A) + P(A') = P(\Omega) = 1$. Η τελευταία σχέση μας δίνει τη σχέση (3) .

Είναι $B - A = BA'$ και $B = BA' \cup AB$. Αλλά τα ενδεχόμενα $(BA'), (AB)$ είναι ξένα, δηλ. $(BA') \cap (AB) = \emptyset$. Από το(2) έχουμε $P(B) = P(BA') + P(AB)$ που μας δίνει την σχέση (4).

Είναι $A \cup B = A \cup A'B$ και $AA'B = \emptyset$, δηλ. τα ενδεχόμενα Α και Α'Β είναι ξένα. Από το (2) και τη σχέση (4) έχουμε

$$P(A \cup B) = P(A) + P(A'B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Η σχέση (5) είναι γνωστή ως **προσθετικό θεώρημα**.

Από την (3) έχουμε $P(A) = 1 - P(A')$ και από το Α1 ότι $P(A') \geq 0$, τα οποία μας δίνουν την (6).

Από την (4) και το Α1 έχουμε $P(B-A)=P(BA')=P(B)-P(AB)\geq 0$. Αλλά $AB=A$ από την υπόθεση. Άρα $P(B)\geq P(A)$.

Παραδείγματα

8.Ένα αμερόληπτο νόμισμα ρίχνεται 2 φορές. Έστω τα εξής ενδεχόμενα:
Α=" ακριβώς μία φορά εμφανίζεται η ένδειξη κεφαλή (Κ)".
Β=" τουλάχιστον μία φορά εμφανίζεται η ένδειξη κεφαλή (Κ)".
Γ=" δεν εμφανίζεται η ένδειξη γράμματα (Γ)".
Δ=" εμφανίζονται 2 κεφαλές ή το πολύ μία φορά εμφανίζεται η ένδειξη κεφαλή (Κ)".
Ε=" εμφανίζεται το Β ή το Γ".
Ζ=" αν συμβαίνει το Β, τότε δεν συμβαίνει το Γ".
Θέλουμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες των παραπάνω ενδεχομένων.Κατ' αρχήν πρέπει να προσδιορίσουμε το δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης. Είναι $\Omega=\{KK,\Gamma\Gamma,K\Gamma,\Gamma K\}$ και τα στοιχεία του είναι ισοπίθανα αφού το νόμισμα είναι αμερόληπτο.

Ο χώρος ενδεχομένων $\mathcal{A}$ που αποτελείται από όλα τα δυνατά υποσύνολα του Ω είναι:
$\mathcal{A}=\{\{KK\},\{\Gamma\Gamma\},\{K\Gamma\},\{\Gamma K\},\{KK,\Gamma\Gamma\},\{KK,K\Gamma\}.\{KK,\Gamma K\}$
$\{\Gamma\Gamma,K\Gamma\},\{\Gamma\Gamma,\Gamma K\},\{K\Gamma,\Gamma K\},\{KK,\Gamma\Gamma,K\Gamma\},\{KK,\Gamma\Gamma,\Gamma K\},$
$\{\Gamma\Gamma,K\Gamma,\Gamma K\},\{KK,K\Gamma,\Gamma K\},\{\Omega\},\{\emptyset\}\}$

Παρατηρούμε ότι τα ενδεχόμενα για τα οποία ενδιαφερόμαστε αποτελούνται από τα εξής στοιχειώδη ενδεχόμενα:
$A=\{K\Gamma,\Gamma K\}, B=\{K\Gamma,\Gamma K,KK\}, \Gamma=\{KK\}, \Delta=\{KK,K\Gamma,\Gamma K,\Gamma\Gamma\}, E=\{B\cup\Gamma\}=\{K\Gamma,\Gamma K,KK\}, Z=\{K\Gamma,\Gamma K\}$.
Άρα οι αντίστοιχες πιθανότητες είναι
$P(A)=P(\{K\Gamma,\Gamma K\}=2/4,\quad P(B)=P(\{K\Gamma,\Gamma K,KK\})=3/4.$
$P(\Gamma)=P(\{KK\})=1/4,\quad P(\Delta)=P(\{KK,K\Gamma,\Gamma K,\Gamma\Gamma\})=1.$
Από τη σχέση (5), δηλ. το προσθετικό θεώρημα έχουμε

$$P(E)=P(\{B\cup\Gamma\})=P(B)+P(\Gamma)-P(B\Gamma)=3/4+1/4\ -\ 1/4=3/4$$

.
Τέλος, η σχέση (4) μας δίνει $P(Z)=P(B\Gamma')=P(B)-P(B\Gamma)=3/4-1/4=2/4$.

Η διαδικασία προσδιορισμού του δειγματικού χώρου και του χώρου ενδεχομένων, αν αυτό απαιτείται, γίνεται πολύπλοκη αν αυξήσουμε τον αριθμό των ρίψεων του νομίσματος όπως φαίνεται από το επόμενο παράδειγμα.

9. Ένα αμερόληπτο νόμισμα ρίχνεται τρεις φορές. Έστω τα ακόλουθα ενδεχόμενα:
Α= "ακριβώς 2 φορές εμφανίζεται η ένδειξη κεφαλή (Κ)".
Β= "τουλάχιστον 2 φορές εμφανίζεται η ένδειξη γράμματα (Γ)".
Γ= "το πολύ 2 φορές εμφανίζεται η ένδειξη κεφαλή (Κ)".
Δ= "εμφανίζονται και οι δύο ενδείξεις".
Ε= "εμφανίζεται μία φορά κεφαλή ή το πολύ 2 φορές γράμματα".

Για να υπολογίσουμε τις πιθανότητες των παραπάνω ενδεχομένων πρέπει να προσδιορίσουμε τον δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης. Είναι $\Omega = \{KKK, \Gamma\Gamma\Gamma, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK, \Gamma\Gamma K, \Gamma K\Gamma, K\Gamma\Gamma\}$. Ο χώρος των ενδεχομένων $\mathcal{A}$ που συμπίπτει με το δυναμοσύνολο $\mathcal{D}$(Α), δηλ. όλα τα δυνατά υποσύνολα του Ω είναι
$\mathcal{A} = \{\{KKK\}, \{\Gamma\Gamma\Gamma\}, \{KK\Gamma\}, \{K\Gamma K\}, \{\Gamma KK\}, \{\Gamma\Gamma K\}, \{\Gamma K\Gamma\}, \{K\Gamma\Gamma\},$
$\{KKK, \Gamma\Gamma\Gamma\}, \{KKK, KK\Gamma\}, \ldots, \{\Gamma K\Gamma, K\Gamma\Gamma\},$
$\{KKK, \Gamma\Gamma\Gamma, KK\Gamma\}, \{KKK, \Gamma\Gamma\Gamma, K\Gamma K\}, \ldots, \{\Gamma\Gamma K, \Gamma K\Gamma, K\Gamma\Gamma\},$
$\{KKK, \Gamma\Gamma\Gamma, KK\Gamma, K\Gamma K\}, \ldots,$
$\{KKK, \Gamma\Gamma\Gamma, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK\}, \{KKK, \Gamma\Gamma\Gamma, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma\Gamma K\}, \ldots,$
$\{KKK, \Gamma\Gamma\Gamma, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK, \Gamma\Gamma K\}, \ldots,$
$\{KKK, \Gamma\Gamma\Gamma, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK, \Gamma\Gamma K, \Gamma K\Gamma\}, \ldots, \{\Omega\}, \{\emptyset\}\}.$
Δηλ. το σύνολο των ενδεχομένων $\mathcal{A}$ περιλαμβάνει 2^8 στοιχεία-ενδεχόμενα.

Αφού το νόμισμα είναι αμερόληπτο έχουμε ότι όλα τα στοιχεία του Ω, δηλ. τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, δηλ. έχουν πιθανότητα εμφάνισης 1/8. Άρα
$P(A) = P(\{KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK\}) = 3/8$
$P(B) = P(\{\Gamma\Gamma\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma K\Gamma, K\Gamma\Gamma\}) = 4/8$
$P(\Gamma) = P(\{\Gamma\Gamma\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma K\Gamma, K\Gamma\Gamma, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK\}) = 7/8$
$P(\Delta) = P(\{KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK, \Gamma\Gamma K, \Gamma K\Gamma, K\Gamma\Gamma\}) = 6/8$
$P(E) = P(\{\Gamma\Gamma K, \Gamma K\Gamma, K\Gamma\Gamma, KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK\}) = 7/8.$

Η τελευταία πιθανότητα μπορεί να υπολογισθεί και ως εξής: Έστω τα ενδεχόμενα E'=εμφανίζεται μία φορά κεφαλή και E'' =εμφανίζονται το πολύ 2 φορές γράμματα. Τότε $E = E' \cup E'$ και από το προσθετικό θεώρημα έχουμε

$$P(E) = P(E') + P(E') - P(E'E'') = 3/8 + 7/8 - 3/8 = 7/8$$

αφού
$E' = \{\Gamma\Gamma K, \Gamma K\Gamma, K\Gamma\Gamma\}, E'' = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK, \Gamma\Gamma K, \Gamma K\Gamma,$ $K\Gamma\Gamma\}$ και $E' \cap E'' \equiv E'E'' = \{\Gamma\Gamma K, \Gamma K\Gamma, K\Gamma\Gamma\}$.

10. Ας θεωρήσουμε έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή που διαθέτει 5 όμοιους tape drives. Ένα πείραμα τύχης που μπορεί να γίνει είναι το εξής: Ελέγχεται ο υπολογιστής ως προς το πόσοι tape drives είναι ελεύθεροι. Κάθε tape drive είναι στην κατάσταση 0 αν είναι απασχολημένος και στην κατάσταση 1 αν είναι ελεύθερος. Ένα δυνατό αποτέλεσμα είναι μία πεντάδα της μορφής (0, 1, 1, 0, 1), που σημαίνει ότι οι 1ος και 4ος είναι απασχολημένοι, ενώ οι 2ος, 3ος και 5ος είναι ελεύθεροι. Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από $2^5 = 32$ στοιχειώδη ενδεχόμενα και το σύνολο των ενδεχομένων αποτελείται από 2^{32} ενδεχόμενα.

Εύκολα μπορεί κανείς να φανταστεί πόσο επίπονη είναι η διαδικασία καταγραφής τους. Αργότερα θα δούμε ότι μπορούμε ορίζοντας κατάλληλη τυχαία μεταβλητή να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα πολύ εύκολα. Στην παρούσα φάση επιθυμούμε να γίνει κατανοητό πως μπορούμε να προσδιορίσουμε το δειγματικό χώρο, τα ενδεχόμενα που μας ενδιαφέρουν και να εφαρμόσουμε τον ορισμό της κλασικής πιθανότητας.

Έστω ότι ενδιαφερόμαστε για την πιθανότητα των εξής ενδεχομένων:
Α=“τουλάχιστον 4 tape drives είναι ελεύθεροι”.
Β=“το πολύ 4 tape drives είναι ελεύθεροι”.
Γ=“Ο tape drive 1 είναι ελεύθερος” .
Δ=“περιττός αριθμός από tape drives είναι απασχολημένοι”.

Στον παρακάτω πίνακα δίνουμε όλα τα δυνατά αποτελέσματα.

Πίνακας I

$\omega_0 = (0,0,0,0,0)$	$\omega_8 = (0,1,0,0,0)$	$\omega_{16} = (1,0,0,0,0)$	$\omega_{24} = (1,1,0,0,0)$
$\omega_1 = (0,0,0,0,1)$	$\omega_9 = (0,1,0,0,1)$	$\omega_{17} = (1,0,0,0,1)$	$\omega_{25} = (1,1,0,0,1)$
$\omega_2 = (0,0,0,1,0)$	$\omega_{10} = (0,1,0,1,0)$	$\omega_{18} = (1,0,0,1,0)$	$\omega_{26} = (1,1,0,1,0)$
$\omega_3 = (0,0,0,1,1)$	$\omega_{11} = (0,1,0,1,1)$	$\omega_{19} = (1,0,0,1,1)$	$\omega_{27} = (1,1,0,1,1)$
$\omega_4 = (0,0,1,0,0)$	$\omega_{12} = (0,1,1,0,0)$	$\omega_{20} = (1,0,1,0,1)$	$\omega_{28} = (1,1,1,0,0)$
$\omega_5 = (0,0,1,0,1)$	$\omega_{13} = (0,1,1,0,1)$	$\omega_{21} = (1,0,1,0,1)$	$\omega_{29} = (1,1,1,0,1)$
$\omega_6 = (0,0,1,1,0)$	$\omega_{14} = (0,1,1,1,0)$	$\omega_{22} = (1,0,1,1,0)$	$\omega_{30} = (1,1,1,1,0)$
$\omega_7 = (0,0,1,1,1)$	$\omega_{15} = (0,1,1,1,1)$	$\omega_{23} = (1,0,1,1,1)$	$\omega_{31} = (1,1,1,1,1)$

Από το ότι οι tape drives είναι όμοιοι και λόγω έλλειψης επαρκούς λόγου για το αντίθετο θεωρούμε ότι τα 32 στοιχειώδη ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου είναι ισοπίθανα. Συνεπως εφαρμόζουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας. Είναι
$A = \{\omega_{15}, \omega_{23}, \omega_{27}, \omega_{29}, \omega_{30}, \omega_{31}\}$, άρα $P(A) = 6/32$.
$B = \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{30}\}$, άρα $P(B) = 31/32$.
$\Gamma = \{\omega_{16}, \omega_{17}, \omega_{18}, \ldots, \omega_{31}\}$, άρα $P(\Gamma) = 16/32$.
$\Delta = \{\omega_5, \omega_6, \omega_9, \omega_{10}, \omega_{12}, \omega_{15}, \omega_{17}, \omega_{18}, \omega_{23}, \omega_{24}, \omega_{27}, \omega_{29}, \omega_{30}\}$, άρα $P(\Delta) = 13/32$.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες διαφόρων ενδεχομένων. Για παράδειγμα,
A-B = "ακριβώς 4 tape drives είναι ελεύθεροι",
$P(A-B) = P(A) - P(AB) = 6/32 - 4/32 = 2/32$.
$A\Gamma'$= "τουλάχιστον 4 tape drives είναι ελεύθεροι και ο 1ος tape drive δεν είναι".
$P(A\Gamma') = P(A) - P(A\Gamma) = 6/32 - 5/32 = 1/32$.
$A \cup \Delta$ = "τουλάχιστον 4 tape drives είναι ελεύθεροι ή περιττός αριθμός από tape drives είναι απασχολημένοι".
$P(A \cup \Delta) = P(A) + P(\Delta) - P(A\Delta) = 6/32 + 13/32 - 5/32 = 14/32$.
$A'\Gamma'$="το πολύ 3 tape drives είναι ελεύθεροι και η ο 1ος tape drive δεν είναι ελεύθερος".
$P(A'\Gamma') = P(A \cup \Gamma)' = 1 - P(A \cup \Gamma) = 1 - [P(A) + P(\Gamma) - P(A\Gamma)] = 1 - 6/32 - 16/32 + 5/32 = 15/32$.
$P(A\Gamma)' = P(A' \cup \Gamma') = P(A') + P(\Gamma') - P(A'\Gamma') = 26/32 + 16/32 - 15/32 = 27/32$ Για τον υπολογισμό των παραπάνω πιθανοτήτων χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις της Πρότασης 1 και οι κανόνες De Morgan.

Το προσθετικό θεώρημα, σχέση (5), στη γενική του μορφή έχει ως εξής:

Θεώρημα Poincare

Έστω τα ενδεχόμενα $A_1, \ldots, A_n$. Η πιθανότητα του ενδεχομένου Α="τουλάχιστον ένα από τα $A_1, \ldots, A_n$ συμβαίνει" δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}
P(A) \quad &= \quad P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \\
&= \quad P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) \\
&- \quad P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - \ \ldots - P(A_{n-1}A_n) \\
&+ \quad P(A_1A_2A_3) + \ \ldots + P(A_{n-2}A_{n-1}A_n) \\
&\vdots \\
&(-1)^{n-1} \quad P(A_1A_2A_3 \ldots A_n). \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

Αν επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned}
P(A_1) &= P(A_2) = \ldots = P(A_n) \\
P(A_1A_2) &= P(A_1A_3) = \ldots = P(A_{n-1}A_n) \\
P(A_1A_2A_3) &= P(A_1A_2A_4) = \ldots = P(A_{n-2}A_{n-1}A_n \\
&\vdots \\
P(A_1 \ldots A_{n-1}) &= P(A_2 \ldots A_n) \ldots ,
\end{aligned}$$

τότε η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$\begin{aligned}
P(A) \quad &= \quad \binom{n}{1} P(A_1) + \binom{n}{2} P(A_1A_2) + \ldots \\
&+ \quad \binom{n}{r} P(A_1A_2 \ldots A_r) + \ldots + \binom{n}{n} P(A_1 \ldots A_n). \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

Το παρακάτω πρόβλημα θεωρείται κλασική εφαρμογή του θεωρήματος Poincare και υπάρχουν πολλές γενικεύσεις του. Αναφέρουμε το πρόβλημα στην πιο απλή μορφή του.

Το πρόβλημα των συναντήσεων

Έστω ότι έχουμε ν διαφορετικά γράμματα (π.χ. ν λογαριασμούς του ΟΤΕ) και τους αντίστοιχους ν φακέλους. Η τοποθέτηση των γραμμάτων στους φακέλους γίνεται τυχαία. Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου Α= "τουλάχιστον ένα γράμμα να τοποθετηθεί στο σωστό φάκελο";

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα που ζητάμε ας ορίσουμε τα ενδεχόμενα: A_i=" το i γράμμα τοποθετείται στον i φάκελο ", $i = 1, \ldots, \nu$. Τότε

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu)$$

και σύμφωνα με την τελευταία διατύπωση του θεωρήματος Poincare έχουμε

$$\begin{aligned} P(A) &= \binom{\nu}{1} P(A_1) - \binom{\nu}{2} P(A_1A_2) + \ldots \\ &+ (-1)^{r-1} \binom{\nu}{r} P(A_1A_2\ldots A_r) + \ldots + (-1)^{\nu-1} \binom{\nu}{\nu} P(A_1 \ldots A_\nu) \\ &= \binom{\nu}{1} \frac{(\nu-1)!}{\nu!} - \binom{\nu}{2} \frac{(\nu-2)!}{\nu!} + \ldots \\ &+ (-1)^{r-1} \binom{\nu}{r} \frac{(\nu-r)!}{\nu!} + \ldots + (-1)^{\nu-1} \binom{\nu}{\nu} \frac{1}{\nu!} \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{r-1} \frac{1}{r!} + \ldots + (-1)^{\nu-1} \frac{1}{\nu!}. \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε τον απλοποιημένο τύπο του θεωρήματος αφού δεν έχουμε κάποιο λόγο να θεωρούμε ότι δεν είναι ίσες οι πιθανότητες $\{P(A_1), \ldots, P(A_\nu)\}$, $\{P(A_1A_2), P(A_1A_3), \ldots\}$ κ.λ.π. Για την πιθανότητα $P(A_1A_2 \ldots A_r), r = 1, \ldots, \nu$ σκεφτόμαστε ως εξής: Αφού το ενδεχόμενο $A_1A_2 \ldots A_r$ σημαίνει ότι r γράμματα τοποθετούνται σωστά, έχουμε ότι ο ένας και μοναδικός ευνοϊκός τρόπος που υπάρχει για το ενδεχόμενο αυτό συνδυάζεται με τους $(\nu - r)!$ τρόπους που υπάρχουν για να τοποθετηθούν τυχαία τα υπόλοιπα $\nu - r$ γράμματα στους υπόλοιπους $\nu - r$ φακέλους, άρα έχουμε

$$P(A_1A_2 \ldots A_r) = \frac{(\nu - r)!}{\nu!}.$$

Για ν αρκετά μεγάλο έχουμε

$$P(A) = \sum_{\varkappa=1}^{\nu} (-1)^{k-1} \frac{1}{\varkappa!} \approx 1 - e^{(-1)}.$$

Από τα παραπάνω παραδείγματα είναι φανερό ότι μπορεί ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης να αποτελείται από πολλά στοιχεία (στοιχειώδη ενδεχόμενα), και η διαδικασία καταμέτρησης τους να είναι εξαιρετικά επίπονη. Η γνώση στοιχειωδών αρχών απαρίθμησης βοηθάει στον προσδιορισμό τους και άρα στον προσδιορισμό εκείνων που είναι ευνο ϊ κά για τα ενδεχόμενα για τα οποία ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε την πιθάνοτητά τους. Μία σύντομη παρουσίαση αυτών των αρχών επιχειρούμε στη συνέχεια.

1.3 Βασικές Αρχές Απαρίθμησης

Αρχή του Αθροίσματος: Έστω τα στοιχεία $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu\}$ και ας υποθέσουμε ότι το α_i μπορεί να επιλεγεί κατά $\varkappa_i, i = 1, \ldots, \nu$, έτσι ώστε κάθε επιλογή του α_i αποκλείει την ταυτόχρονη επιλογή του α_j για $i \neq j$. Τότε μπορούμε να επιλέξουμε το α_1 ή το α_2 ή ... ή το α_ν κατά $\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 + \ldots + \varkappa_\nu$ τρόπους.
Αρχή του Γινομένου:Έστω τα στοιχεία $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu\}$ τα οποία μπορούν να επιλεγούν κατά $\varkappa_i, i = 1, \ldots, \nu$, έτσι ώστε για την καθεμία από $\varkappa_i$ επιλογές του α_i υπάρχουν $\varkappa_j$ τρόποι επιλογής του α_j για $i \neq j$. Τότε μπορούμε να επιλέξουμε το α_1 και το α_2 και το ... και το α_ν κατά $\varkappa_1 \cdot \varkappa_2 \cdot \varkappa_3 \cdot \ldots \cdot \varkappa_\nu$ τρόπους.

Παραδείγματα

11.Σε μία εργαστηριακή άσκηση συμμετέχουν 10 φοιτητές και 5 φοιτήτριες. Μία συγκεκριμένη εργασία πρόκειται να εκτελεστεί από έναν φοιτητή **ή** μία φοιτήτρια. Υπάρχουν 10+5=15 τρόποι για να εκλέξουμε το άτομο που θα διεκπεραιώσει την εργασία.

Αν για τη συγκεκριμένη εργασία απαιτούνται ένας φοιτητής **και** μία φοιτήτρια, τότε υπάρχουν $10 \times 5 = 50$ δυνατά ζευγάρια για την διεκπεραίωση της εργασίας.

12.Για να πάμε από την Αθήνα στην Επίδαυρο έχουμε 3 δυνατούς τρόπους,ενώ για να πάμε στους Δελφούς 2 δυνατούς τρόπους. Υπάρχουν 3+2=5 δυνατοί τρόποι για να πάμε στην Επίδαυρο ή στους Δελφούς.

Αν μετά την Επίδαυρο έχουμε 2 τρόπους για να πάμε στο Ναύπλιο, τότε έχουμε $3 \times 2 = 6$ τρόπους για να πάμε από την Αθήνα στο Ναύπλιο.

Αν μετά τους Δελφούς έχουμε 2 τρόπους για να πάμε στο χιονοδρομικό κέντρο του Παρνασσού, τότε υπάρχουν $2 \times 2 = 4$ τρόποι για να πάμε από την Αθήνα στον Παρνασσό.

13. Μία διατμηματική επιτροπή φοιτητών της Σχολής Θετικών Επιστημών, που ασχολείται με θέματα του χώρου της Πανεπιστημιούπολης, αποτελείται από 5 μαθηματικούς, 5 φυσικούς, 4 χημικούς, 3 βιολόγους και 3 γεωλόγους. Μία υποεπιτροπή 5 φοιτητών πρόκειται να ορισθεί για να ασχοληθεί με το θέμα του παρκαρίσματος των αυτοκινήτων και η οποία θα αποτελείται από ένα φοιτητή από κάθε τμήμα. Υπάρχουν $5 \times 5 \times 4 \times 3 \times 3 = 600$ τρόποι για να καθορισθεί η επιτροπή.

Διατάξεις:Πόσοι δυνατοί τρόποι υπάρχουν για να διατάξουμε τα γράμματα α, β, γ; Εύκολα καταγράφουμε τους εξής: αβγ, αγβ, βαγ, βγα, γαβ, γβα. Υπάρχουν 6 δυνατοί τρόποι. Κάθε τρόπος καλείται Διάταξη. Γενικά, έστω ότι έχουμε ν διακεκριμένα στοιχεία τα οποία θέλουμε να τα διατάξουμε. Σκεφτόμαστε ως εξής: Για το πρώτο στοιχείο υπάρχουν ν δυνατοί τρόποι, για το δεύτερο ν-1, για το τρίτο ν-2 κ.λ.π. για το ν-οστό 1 τρόπος. Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε ότι υπάρχουν συνολικά

$$\nu \cdot (\nu - 1) \cdot (\nu - 2) \cdot \ldots \cdot 1 = \nu!$$

δυνατοί τρόποι. Στην περίπτωση αυτή η διάταξη καλείται και Μετάθεση των ν στοιχείων.

Έστω τώρα ότι θέλουμε να διατάξουμε τα κ στοιχεία από τα ν, κ¡ν. Τότε υπάρχουν ν τρόποι για να πάρουμε το πρώτο, ν-1 για το δεύτερο, κ.λ.π. και ν-(κ-1) για να πάρουμε το κ-οστό. Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε συνολικά

$$\nu \cdot (\nu - 1) \cdot (\nu - 2) \cdot \ldots \cdot (\nu - \varkappa + 1) = (\nu)_\varkappa$$

δυνατούς τρόπους. Οι διατάξεις αυτές καλούνται διατάξεις των ν στοιχείων ανά κ και συμβολίζονται με το $(\nu)_\varkappa$. Αν κ=ν, τότε έχουμε μετάθεση ή διάταξη όλων των στοιχείων.

Παραδείγματα

14.Μία ομάδα που εκτελεί ένα ορισμένο εργαστήριο αποτελείται από 5 φοιτητές και 3 φοιτήτριες και ο καθένας μπορεί να καθήσει σε μια από τις 8 αριθμημένες θέσεις(διακεκριμένες).

Υπάρχουν 8! $= 40320$ τρόποι για να καθήσουν.

Έστω ότι οι 8 συμμετέχοντες στην άσκηση παίρνουν διαφορετικό βαθμό και κατατάσσονται σύμφωνα με το βαθμό τους. Δεν γνωρίζουμε ποιος πήρε ποιο βαθμό. Υπάρχουν 8! κατατάξεις.

Έστω ότι οι φοιτητές κατατάσσονται μεταξύ τους και οι φοιτήτριες το ίδιο. Πόσες δυνατές κατατάξεις έχουμε στην περίπτωση αυτή;

Υπάρχουν 5! τρόποι για τις κατατάξεις των φοιτητών και 3! τρόποι για τις κατατάξεις των φοιτητριών. Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε συνολικά $5! \times 3! = 720$ συνολικές κατατάξεις.

14. Σε έναν ανελκυστήρα δεκαόροφου κτιρίου μπαίνουν 10 άτομα στο ισόγειο. Υπάρχουν 10!=3628800 τρόποι για να κατέβουν ο καθένας σε διαφορετικό όροφο.

Έστω ότι τα άτομα είναι 6. Πόσοι δυνατοί τρόποι υπάρχουν για να κατέβουν σε διαφορετικό όροφο ο καθένας;

Υπάρχουν $(10)_6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200$ συνολικά τρόποι.

15. Η Δήμητρα, φοιτήτρια του Γεωλογικού Τμήματος, διακρίνεται για την τάξη της. Η Δήμητρα θέλει να τοποθετήσει σε ένα ράφι 10 βιβλία από τα οποία 5 είναι σχετικά με γεωλογία, 2 με χημεία, 1 με ηλεκτρονικούς υπολογιστές και 2 με μαθηματικά έτσι ώστε τα βιβλία της κάθε ειδικότητας να είναι μαζί. Πόσοι διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης υπάρχουν;

Τα 5 βιβλία γεωλογίας μπορούν να τοποθετηθούν κατά 5! τρόπους, τα 2 της χημείας κατά 2! και όμοια τα υπόλοιπα. Εφαρμόζοντας την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε $5! \times 2! \times 1! \times 2! = 480$ τρόπους. Αλλά δεν είναι μόνο αυτοί! Με ποιά σειρά θα τοποθετηθούν οι ομάδες (ειδικότητες); Υπάρχουν 4! τρόποι. Άρα υπάρχουν συνολικά $480 \times 24 = 11520$ τρόποι για να τοποθετήσει η Δήμητρα τα βιβλία της με τον τρόπο που επιθυμεί.

16. Πόσες διαφορετικές διατάξεις μπορούμε να καταγράψουμε χρησιμοποιώντας τα γράμματα Μ, Α, Θ, Η, Μ, Α, Τ, Ι, Κ, Α;

Παρατηρούμε ότι έχουμε 10 γράμματα και αν ήταν διαφορετικά θα είχαμε 10! δυνατούς τρόπους. Αλλά έχουμε 2 Μ, 3 Α, 1 Θ, 1 Η, 1 Τ, 1 Ι και 1 Κ. Άρα έχουμε συνολικά έχουμε $10!/2! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! = 302400$ δυνατές διατάξεις των γραμμάτων μας.

Γενικά, αν έχουμε ν στοιχεία από τα οποία ν_1 είναι ίδια, ν_2 είναι ίδια, κ.λ.π., $\nu_\varkappa$ ίδια, με $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\varkappa = \nu$, τότε υπάρχουν

$$\frac{\nu!}{\nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \ldots \cdot \nu_\varkappa}$$

δυνατές διατάξεις.

17.Πόσους διαφορετικούς σχηματισμούς μπορούμε να δημιουργήσουμε από 9 σημαίες στη σειρά, από τις οποίες 3 είναι της ΑΕΚ, 3 του Ολυμπιακού, 2 του ΠΑΟ και 1 του Άρη;

Υπάρχουν $9!/3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! = 5040$ σχηματισμοί.

Διατάξεις με Επαναλήψεις:Έστω τα στοιχεία $\{\alpha_1, \ldots \alpha_\nu\}$ τα οποία θέλουμε να τα διατάξουμε ανά κ επιτρέποντας επανάληψη του ίδιου στοιχείου. Πόσοι είναι οι δυνατοί τρόποι; Για να επιλέξουμε το πρώτο έχουμε ν τρόπους, για το δεύτερο επίσης ν τρόπους κ.λ.π. Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε ότι υπάρχουν $\nu \cdot \nu \cdot \ldots \cdot \nu = \nu^\varkappa$ δυνατοί τρόποι.

Παραδείγματα

18. Στη ρίψη ενός νομίσματος 3 φορές έχουμε διατάξεις με επαναλήψεις των 2 στοιχείων (Κ, Γ) ανά 3. Άρα υπάρχουν $2^3 = 8$ δυνατοί τρόποι, που αποτελούν τα στοιχειώδη ενδεχόμενα.

19.Στη ρίψη ενός ζαριού 3 φορές έχουμε διατάξεις με επαναλήψεις των 6 στοιχείων (1, 2, 3, 4, 5, 6) ανά 3. Άρα υπάρχουν $6^3 = 216$ στοιχειώδη ενδεχόμενα. Με τον τρόπο αυτό αποφεύγουμε τη διαδικασία καταγραφής τους που είναι αρκετά επίπονη. Ας υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου A="και στις 3 ρίψεις εμφανίζονται διαφορετικές ενδείξεις". Το ενδεχόμενο A αποτελείται από τόσα στοιχεία όσες είναι οι διατάξεις των 6 στοιχείων ανά 3 χωρίς επανάληψη, δηλ. $(6)_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. Άρα $P(A) = \frac{120}{216}$, με την προϋπόθεση ότι το ζάρι είναι αμερόληπτο.

20.Το πρόβλημα του Chevalie de Mere

Τι είναι συμφερότερο; "να στοιχηματίσω στην εμφάνιση τουλάχιστον ενός 6 κατά την ρίψη ενός ζαριού 4 φορές ή να στοιχηματίσω στην εμφάνιση τουλάχιστον ενός (6,6) κατά την ρίψη 2 διακεκριμένων ζαριών 24 φορές?".

Έστω τα ενδεχόμενα:

A:"εμφανίζεται τουλάχιστον ένα 6 στις 4 ρίψεις του ζαριού".

B:"εμφανίζεται τουλάχιστον ένα (6,6) στις 24 ρίψεις 2 ζαριών".

Ο δειγματικός χώρος του πρώτου πειράματος αποτελείται από 6^4 στοιχεία, δηλ. τις επαναληπτικές διατάξεις των 6 ενδείξεων ανά 4. Τα ευνοϊκά στοιχεία για το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του A, δηλ., του A' είναι όσες τετράδες δεν περιέχουν την ένδειξη 6, άρα οι επαναληπτικές διατάξεις των 5 ενδείξεων (1, 2, 3, 4, 5) ανά 4, δηλ. το πλήθος 5^4. Άρα

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{5^4}{6^4} \approx 0,518$$

Ο δειγματικός χώρος του δεύτερου πειράματος αποτελείται από 36^{24} στοιχεία, δηλ. τις επαναληπτικές διατάξεις των 36 ενδείξεων ανά 24. Τα ευνοϊκά στοιχεία για το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του B, δηλ., του B' είναι όσες εικοσιτετράδες δεν περιέχουν την ένδειξη $(6,6)$, άρα οι επαναληπτικές διατάξεις των 35 ενδείξεων ανά 24, δηλ., 35^{24}. Άρα

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \approx 0,491.$$

Συμπέρασμα: Το παιχνίδι με το ένα ζάρι είναι συμφερότερο.

Συνδυασμοί: Πόσοι δυνατοί τρόποι υπάρχουν για να πάρουμε δύο από τα γράμματα $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής τους; Εύκολα καταγράφουμε τους εξής: αβ, αγ, βγ, δηλ. έχουμε 3 δυνατούς τρόπους. Κάθε τέτοιος τρόπος επιλογής καλείται Συνδυασμός. Γενικά, έστω ότι έχουμε τα στοιχεία $\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ και θέλουμε να επιλέξουμε κ χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά τους αλλά ποιά είναι τα στοιχεία που επιλέγουμε. Για να προσδιορίσουμε τον αριθμό τους σκεφτόμαστε ως εξής: Αν μας ενδιέφερε η σειρά επιλογής τους θα είχαμε τις διατάξεις των ν στοιχείων ανά κ δηλ. $(\nu)_\kappa$ δυνατούς τρόπους. Τα

$\varkappa$ στοιχεία διατάσσονται κατά $\varkappa!$ τρόπους και δεν μας ενδιαφέρουν οι διατάξεις των $\varkappa$ στοιχείων, άρα έχουμε $(\nu)_\varkappa/\varkappa!$ τρόπους για τους συνδυασμούς των ν ανά $\varkappa$ στοιχείων.

Συμβολίζουμε τους συνδυασμούς αυτούς με $\binom{\nu}{\varkappa}$, που καλείται **διωνυμικός συντελεστής** και έχουμε τη σχέση

$$\binom{\nu}{\varkappa} = \frac{(\nu)_\varkappa}{\varkappa!} = \frac{\nu!}{\varkappa!(\nu-\varkappa)!}$$

με $0! = 1$ εξ ορισμού. Ο όρος διωνυμικός συντελεστής προέρχεται από το Διωνυμικό ανάπτυγμα

$$(\alpha+\beta)^\nu = \sum_{\varkappa=0}^{\nu} \binom{\nu}{\varkappa} \alpha^\varkappa \beta^{\nu-\varkappa}.$$

Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= \binom{3}{0}x^0y^3 + \binom{3}{1}x^1y^2 + \binom{3}{2}x^2y^1 + \binom{3}{3}x^3y^0 \\ &= y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + x^3.\end{aligned}$$

Ισχύει η εξής χρήσιμη ταυτότητα

$$\binom{\nu}{\varkappa} = \binom{\nu-1}{\varkappa-1} + \binom{\nu-1}{\varkappa}, 1 \le \varkappa \le \nu.$$

Παραδείγματα

21. Από 15 αντιπροσώπους της Σχολής Θετικών Επιστημών πρόκειται να συσταθεί μία πενταμελής επιτροπή, που θα επεξεργασθεί μία συγκεκριμένη πρόταση. Πόσοι δυνατοί τρόποι υπάρχουν;
Προφανώς δεν μας ενδιαφέρει η σειρά που θα επιλεγούν, αλλά ποιά άτομα θα αποτελούν την επιτροπή, άρα έχουμε

$$\binom{15}{5} = \frac{15!}{5!(15-5)!} = \frac{11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 3003$$

δυνατούς τρόπους.

22. Από 10 φοιτητές και 7 φοιτήτριες πόσες επιτροπές αποτελούμενες από 2 φοιτητές και 3 φοιτήτριες μπορούμε να δημιουργήσουμε;
Από τους 10 φοιτητές μπορούμε να επιλέξουμε τους 2 κατά $\binom{10}{2}$ δυνατούς

τρόπους οι οποίοι θα συνδυαστούν σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή με τους $\binom{7}{3}$ δυνατούς τρόπους επιλογής των 3 φοιτητριών από τις 7. Άρα έχουμε συνολικά

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{7}{3} = \frac{10!}{2!8!} \cdot \frac{7!}{3!4!} = 1575.$$

23. Σε ένα κουτί υπάρχουν 20 αριθμημένες σφαίρες από τις οποίες 12 είναι άσπρες και 8 είναι πράσινες. Εξάγονται 8 σφαίρες μία-μία χωρίς επανάθεση. Ποιά είναι η πιθανότητα στις 8 σφαίρες να υπάρχουν 2 άσπρες και 6 πράσινες;
Υπάρχουν $\binom{20}{8}$ δυνατοί τρόποι για εξαχθούν οι 8 σφαίρες και αυτές οι οκτάδες αποτελούν το δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης. Οι ευνοικές οκτάδες είναι όσες να πάρουμε από τις 12 άσπρες τις 2 και από τις 8 τις 6. Το πλήθος τους είναι

$$\binom{12}{2} \cdot \binom{8}{6}$$

Θεωρούμε ότι όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα λόγω έλλειψης επαρκούς λόγου για το αντίθετο, δηλ. θεωρούμε ότι είναι εξίσου πιθανό να πάρουμε οποιαδήποτε σφαίρα. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$\frac{\binom{12}{2} \cdot \binom{8}{6}}{\binom{20}{8}} = \left\{ \frac{\frac{12!}{2!10!} \frac{8!}{6!2!}}{\frac{20!}{8!12!}} \right\} = 0,02445$$

24. Έστω ένα σύνολο $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_\nu\}$. Πόσα υποσύνολα μπορούμε να κατασκευάσουμε;
Υπάρχουν $\binom{\nu}{1}$ τρόποι για να έχουμε τα υποσύνολα που το καθένα έχει ένα στοιχείο, $\binom{\nu}{2}$ τρόποι για να έχουμε τα υποσύνολα που το καθένα έχει δύο στοιχεία, $\binom{\nu}{3}$ τρόποι για να έχουμε τα υποσύνολα που το καθένα έχει τρία στοιχεία κ.λ.π. $\binom{\nu}{\kappa}$ τρόποι για να έχουμε τα υποσύνολα που το καθένα έχει κ στοιχεία κ.λ.π., τέλος υπάρχουν $\binom{\nu}{\nu} = 1$ τρόπος για να τα πάρουμε όλα,

δηλ. το Ω και $\binom{\nu}{0} = 1$ για να πάρουμε το κενό. Άρα έχουμε συνολικά

$$(1+1)^{\nu} = \sum_{\varkappa=0}^{\nu} \binom{\nu}{\varkappa} 1^{\varkappa} 1^{\nu-\varkappa} = 2^{\nu}$$

υποσύνολα.

Πολυωνυμικός Συντελεστής

Έστω ν διαφορετικά στοιχεία τα οποία θέλουμε να τα κατατάξουμε σε κ διατεταγμένες ομάδες, έτσι ώστε κάθε ομάδα να περιέχει $\nu_i, i = 1, \ldots, \varkappa$, είναι δηλ. $\sum_{i=1}^{\varkappa} \nu_i$. Πόσοι δυνατοί τρόποι υπάρχουν;

Τα ν_1 στοιχεία, που αποτελούν την πρώτη ομάδα μπορούν να επιλεγούν κατά $\binom{\nu}{\nu_1}$ τρόπους. Τα ν_2 κατά $\binom{\nu-\nu_1}{\nu_2}$ τρόπους, κ.λ.π., τα ν_i κατά $\binom{\nu-\nu_1-\ldots-\nu_{i-1}}{\nu_i}$ τρόπους κ.λ.π. τα $\nu_\varkappa$ κατά $\binom{\nu-\nu_1-\ldots-\nu_{\varkappa-1}}{\nu_\varkappa}$ τρόπους. Όλοι αυτοί οι τρόποι συνδυάζονται μεταξύ τους σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή και μας δίνουν

$$\binom{\nu}{\nu_1} \cdot \binom{\nu-\nu_1}{\nu_2} \cdot \ldots \cdot \binom{\nu-\nu_1-\cdots-\nu_{i-1}}{\nu_i} \cdot \ldots \cdot \binom{\nu-\nu_1-\cdots-\nu_{\varkappa-1}}{\nu_\varkappa}$$

$$= \frac{\nu!}{\nu_1!\nu_2!\ldots\nu_i!\ldots\nu_\varkappa!}$$

δυνατούς τρόπους.

Οι αριθμοί

$$\frac{\nu!}{\nu_1!\nu_2!\ldots\nu_i!\ldots\nu_\varkappa!}$$

συμβολίζονται με $\binom{\nu}{\nu_1, \ldots, \nu_\varkappa}$ και είναι γνωστοί ως πολυωνυμικοί συντελεστές επειδή εμφανίζονται στο πολυωνυμικό θεώρημα που έχει ως εξής:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^{\nu} = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_\varkappa} \binom{\nu}{\nu_1, \ldots, \nu_\varkappa} x_1^{\nu_1} \cdot x_2^{\nu_2} \cdot, \ldots, x_\varkappa^{\nu_\varkappa},$$

δηλ. το άθροισμα λαμβάνεται για όλους τους μη αρνητικούς ακέραιους $(\nu_1, \ldots \nu_\varkappa)$ που είναι τέτοιοι ώστε $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\varkappa = \nu$.

Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+x_3)^2 &= \binom{2}{2,0,0} x_1^2x_2^0x_3^0 + \binom{2}{0,2,0} x_1^0x_2^2x_3^0 \\ &+ \binom{2}{0,0,2} x_1^0x_2^0x_3^2 + \binom{2}{1,1,0} x_1^1x_2^1x_3^0 \\ &+ \binom{2}{1,0,1} x_1^1x_2^0x_3^1 + \binom{2}{0,1,1} x_1^0x_2^1x_3^1 \\ &= x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3\end{aligned}$$

Παραδείγματα

25. Μία φοιτητική παράταξη διαθέτει 20 άτομα που είναι διατεθειμένα να κάνουν κατά ομάδες τις επόμενες εργασίες: 5 άτομα θα ασχολούνται με το πρόγραμμα σπουδών, 3 άτομα θα καταγράφουν τις σχετικές πληροφορίες στην ιστοσελίδα της παράταξης, 4 άτομα θα οργανώνουν εκδηλώσεις πολιτιστικές, 4 άτομα θα συμμετέχουν στη Γ.Σ. του Τμήματός τους και 4 θα απασχολούνται στο γραφείο της παράταξης ή στα τραπεζάκια. Αν υποθέσουμε ότι όλοι είναι κατάλληλοι για όλες τις παραπάνω δραστηριότητες, τότε πόσοι δυνατοί τρόποι υπάρχουν για να συγκροτηθούν οι σχετικές ομάδες;

Υπάρχουν

$$\frac{20!}{5!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 4!}$$

δυνατοί τρόποι.

26. Μία ομάδα 10 φοιτητών αναλαμβάνει να διεκπεραιώσει ένα πείραμα για το οποίο 3 θα κάνουν την εργασία Α, 4 την εργασία Β και 3 την εργασία Γ. Ο υπεύθυνος καθηγητής κατά πόσους τρόπους μπορεί να καθορίσει τις υποομάδες αυτές;

Προφανώς κατά

$$\frac{10!}{3!\cdot 4!\cdot 3!}$$

τρόπους.

Επαναληπτικοί Συνδυασμοί

Τελειώνοντας τις βασικές αρχές απαρίθμησης αναφέρουμε τους επαναληπτικούς συνδυασμούς των ν στοιχείων ανά κ. Για παράδειγμα, άν έχουμε τα στοιχεία $\{\alpha,\beta,\gamma\}$, τότε οι επαναληπτικοί συνδυασμοί των 3 αυτών στοιχείων ανά 2 είναι: $\{\alpha\alpha,\beta\beta,\gamma\gamma,\alpha\beta,\alpha\gamma,\beta\gamma\}$. Το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών των ν στοιχείων ανά κ είναι

$$\binom{\nu-1+\varkappa}{\varkappa}$$

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο βιβλίο "Συνδυαστική" του Χ. Χαραλαμπίδη και στο βιβλίο του W. Feller, "An Introduction to Probability Theory and Its Applications", 3rd ed., Wiley, 1968.

Παράδειγμα 26. α) Έστω ότι ρίχνουμε 4 διακεκριμένα ζάρια. Το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων είναι οι επαναληπτικές διατάξεις των 6 στοιχείων (ενδείξεων) ανά 4, δηλ., $6^4 = 1296$.
β) Έστω ότι τα ζάρια είναι **όμοια**. Τότε για το ίδιο πείραμα το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων είναι οι επαναληπτικοί συνδυασμοί των 6 στοιχείων (ενδείξεων) ανά 4, δηλ.,

$$\binom{6-1+4}{4} = \binom{9}{4} = \frac{9!}{4!5!} = 126$$

Για παράδειγμα, αναφέρουμε μερικές τέτοιες τετράδες: $\{(1111), (1112), (2234), (6666), \ldots, (4555), \ldots, \}$. Η τετράδα (1112) είναι ίδια με τις $\{(1121), (1211), 2111)\}$, αφού τα ζάρια είναι όμοια. Για το λόγο αυτό έχουμε συνδυασμούς και όχι διατάξεις. Έτσι ο αριθμός των δυνατών αποτελεσμάτων στη β) περίπτωση είναι πολύ μικρότερος από αυτόν της α). Ας υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου A που αφορά το παραπάνω πείραμα και στις δύο περιπτώσεις και ορίζεται ως εξής:
A="εμφανίζονται 3 όμοιες ενδείξεις". Η ζητούμενη πιθανότητα για τις δύο παραπάνω περιπτώσεις είναι αντίστοιχα

$$\alpha)\ P(A) = \frac{120}{1296} \text{ και } \beta)\ P(A) = \frac{30}{126}.$$

1.4 Δεσμευμένη Πιθανότητα

Μέχρι τώρα αντιμετωπίσαμε το ακόλουθο πρόβλημα: Ένα πείραμα τύχης εκτελείται και ενδιαφερόμαστε να προσδιορίσουμε την πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου, έστω A, με βάση το δειγματικό χώρο του πειράματος. Σε πολλές περιπτώσεις συμβαίνει να εκτελείται το πείραμα τύχης και να έχουμε την πληροφόρηση ότι συνέβη ένα ενδεχόμενο, έστω B. Με δεδομένο αυτό το συμβάν ή αυτήν την πληροφορία τι θα μπορούσαμε να πούμε για την πιθανότητα του ενδεχομένου A; Είναι λογικό να σκεφτούμε ότι η πληροφορία που μας δόθηκε μας διαμορφώνει άλλη κατάσταση προκειμένου να υπολογίσουμε την πιθανότητα του A. Στην περίπτωση αυτή η πιθανότητα του A δεσμεύεται από το γεγονός της πραγματοποίησης του ενδεχομένου B, για το λόγο αυτό καλείται δεσμευμένη πιθανότητα. Η πιθανότητα αυτή συμβολίζεται με $P(A|B)$. Προτού δοθεί ο ορισμός της ας σκεφτούμε για λίγο το ακόλουθο παράδειγμα:

Ένα κουτί περιέχει 6000 chips από τα οποία 2000 κατασκευάζονται από την εταιρεία Χ και τα υπόλοιπα από την εταιρεία Υ. Είναι γνωστό ότι τα ποσοστά των ελαττωματικών chips των εταιρειών Χ και Υ είναι 10% και 5% αντίστοιχα. Εκλέγεται στην τύχη ένα chip και διαπιστώνεται ότι είναι ελαττωματικό. Να υπολογισθεί η πιθανότητα να προέρχεται από τα chips που παράγονται από την εταιρεία Χ.

Ας ορίσουμε τα ενδεχόμενα: Α=“το chip κατασκευάζεται από την Χ”, Β=“το chip κατασκευάζεται από την Υ”, και Γ=“το chip είναι ελαττωματικό”. Εύκολα υπολογίζονται οι πιθανότητες η $P(A) = 2000/6000 = 1/3$, $P(B) = 4000/6000 = 2/3$ και $P(\mathit{\Gamma}) = 400/6000 = 4/60$.

Τώρα ας εξετάσουμε το ενδεχόμενο ΑΓ=“το chip είναι ελαττωματικό και προέρχεται από την παραγωγή της Χ”. Η πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου είναι $P(A\mathit{\Gamma}) = 200/6000 = 2/60$. Επιπλέον, έχουμε ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου $A|\Gamma$ για το οποίο ενδιαφερόμαστε είναι 200/400 αφού στα 400 ελαττωματικά τα 200 προέρχονται από την εταιρεία Χ. Παρατηρούμε ότι

$$P(A|\Gamma) = 2/4 = \frac{200/6000}{400/6000} = \frac{P(A\mathit{\Gamma})}{P(\mathit{\Gamma})}.$$

Ορισμός 1.5. *Η δεσμευμένη πιθανότητα ενός ενδεχομένου A δεδομένου ενός ενδεχομένου B συμβολίζεται με $P(A|B)$ και δίνεται από τη σχέση*

$$P(A|B = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) > 0. \tag{1.9}$$

Ορισμός 1.6. *Από τον ορισμό 1.5 προκύπτει η ακόλουθη σχέση που καλείται* **πολλαπλασιαστικός τύπος**

$$P(A \cap B) = P(AB) = \begin{cases} P(B)P(A|B) & \text{αν } P(B) > 0 \\ P(A)P(B|A) & \text{αν } P(A) > 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά .} \end{cases} \tag{1.10}$$

Παρατηρήσεις

1.Συνέχεια του παραδείγματος: Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο Α που είναι 2000/6000=1/3 αυξάνεται αν γνωρίζουμε ότι το chip είναι ελαττωματικό.Στην περίπτωση που εξετάσαμε γίνεται 2/4=1/2. Αυτό, όπως είναι φανερό, συμβαίνει γιατί με τη δέσμευση μας δίνεται μία πληροφορία. Υπάρχουν περιπτώσεις που η πληροφορία που μας δίνεται δεν συμβάλλει στην πιθανότητα του ενδεχομένου θετικά και άλλες στις οποίες μπορεί η συμβολή της να είναι αρνητική με την έννοια ότι η πιθανότητα ελαττώνεται. Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου “ $B|\Gamma$ ”. Είναι

$$P(B|\Gamma) = \frac{P(B\Gamma)}{P(\Gamma)} = \frac{200/6000}{400/6000} = \frac{200}{400} = \frac{1}{2},$$

ενώ $P(B) = 4000/6000 = 2/3$. Πως το εξηγείτε;

2. Η δεσμευμένη πιθανότητα πληρεί τα αξιώματα του Kolmogorov, δηλ.
A1. $P(A|B) \geq 0, \forall A, B \in \mathcal{A}$
A2. $P(\Omega|B) = 1, \forall B \in \mathcal{A}$
A3. $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n|\Gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|\Gamma), \forall A_i, A_j : A_iA_j = \emptyset,\ i \neq j.$

Από τα παραπάνω αξιώματα προκύπτουν οι σχέσεις

$$P(A'|B) = 1 - P(A|B) \tag{1.11}$$

$$P(A \cup B|\Gamma) = P(A|\Gamma) + P(B|\Gamma) - P(AB|\Gamma) \tag{1.12}$$

$$P(A'B|\Gamma) = P(B|\Gamma) - P(AB|\Gamma). \tag{1.13}$$

3. Ακόμα, ισχύει η ακόλουθη ενδιαφέρουσα σχέση

$$\frac{P(A|B)}{P(B|A)} = \frac{P(AB)/P(B)}{P(AB)/P(A)} = \frac{P(A)}{P(B)}. \tag{1.14}$$

Παραδείγματα

27. Ένα αμερόληπτο νόμισμα ρίχνεται 2 φορές. Έστω τα ενδεχόμενα
A: η ένδειξη κεφαλή εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά,
B: στην πρώτη ρίψη εμφανίζονται γράμματα
Δ: σε κάθε ρίψη εμφανίζεται διαφορετική ένδειξη.
Να υπολογισθούν οι πιθανότητες:

$$P(A|B), P(B|A), P(\Delta|A), P(\Delta|B).$$

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης είναι $\Omega = \{KK, \Gamma\Gamma, K\Gamma, \Gamma K\}$ και τα ενδεχόμενα που εμφανίζονται είναι:
$A = \{KK, K\Gamma, \Gamma K\}, B = \{\Gamma\Gamma, \Gamma K\}, \Delta = \{K\Gamma, \Gamma K\}, AB = \{\Gamma K\},$
$A\Delta = \{K\Gamma, \Gamma K\}, B\Delta = \{\Gamma K\}.$

Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε

$$\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2 < P(A) = 3/4 \\
P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3 < P(B) = 1/2 \\
P(\Delta|A) &= \frac{P(\Delta A)}{P(A)} = \frac{2/4}{3/4} = 2/3 > P(\Delta) = 1/2 \\
P(\Delta|B) &= \frac{P(\Delta B)}{P(B)} = \frac{1/4}{2/4} = 1/2 = P(\Delta) = 1/2.
\end{aligned}$$

28. Έστω ότι από μία ομάδα 4 γυναικών και 6 ανδρών εκλέγονται τυχαία 2 άτομα.
α) Ποιά είναι η πιθανότητα και τα δύο να είναι γυναίκες;
β) Ποιά είναι η πιθανότητα να εκλεγεί μία γυναίκα και ένας άνδρας;

Ας ορίσουμε τα ενδεχόμενα: $A_\nu, \nu = 1, 2$, όπου A_ν:το ν-οστό άτομο είναι γυναίκα. Τότε για το α) έχουμε

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90}$$

και για το β)

$$\begin{aligned}
P(A_1A_2^{'} \cup A_1^{'}A_2) &= P(A_1)P(A_2^{'}|A_1) + P(A_1^{'})P(A_2|A_1^{'}) \\
&= \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{8}{15}.
\end{aligned}$$

Παρατήρηση: Στο παράδειγμα αυτό χρησιμοποιήσαμε τον πολλαπλασιαστικό τύπο. Επίσης για να προσδιορίσουμε τις δεσμευμένες πιθανότητες δεν εφαρμόσαμε τον ορισμό, αλλά με βάση τον δειγματικό χώρο, όπως αυτός διαμορφώνεται με τη δέσμευση, εφαρμόσαμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας. Για παράδειγμα, η $P(A_2|A_1)$ υπολογίστηκε ως εξής: Αφού είναι δεδομένο ότι το πρώτο άτομο είναι γυναίκα αυτό σημαίνει ότι ο δειγματικός μας χώρος μετατρέπεται σε 9 άτομα από τα οποία 3 είναι γυναίκες και 6 είναι άνδρες. Άρα ο υπολογισμός είναι άμεσος. Όμοια υπολογίζονται και οι υπόλοιπες δεσμευμένες πιθανότητες.

Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα

Ορισμός 1.7. *Τα ενδεχόμενα Α, Β καλούνται ανεξάρτητα αν*

$$P(A \cap B) \;=\; P(A)\; P(B). \tag{1.15}$$

Ορισμός 1.8. *Τα ενδεχόμενα* $\{A_1, \ldots, A_\nu\}$ *καλούνται πλήρως ανεξάρτητα αν και μόνο αν*

$$P(A_{i_1}A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}), \ldots, P(A_{i_r}), \tag{1.16}$$

$\forall\{i_1, \ldots, i_r\} \in \{1, 2, \ldots, \nu\}, r = 2, 3, \ldots, \nu$. *δηλ. για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των ν δεικτών ανά r.*

Οι φράσεις "ανεξάρτητα", "στοχαστικά ανεξάρτητα", "στατιστικά ανεξάρτητα" είναι ισοδύναμες.

Παρατηρούμε ότι αν τα Α, Β είναι ανεξάρτητα, τότε

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

κάτι αναμενόμενο, αφού η πραγματοποίηση του ενδεχομένου Β δεν επηρεάζει το Α.

Στο παράδειγμα 27 της προηγούμενης παραγράφου είδαμε ότι

$$P(\Delta|B) = \frac{P(\Delta B)}{P(B)} = \frac{1/4}{2/4} = 1/2 = P(\Delta) = 1/2,$$

που σημαίνει ότι τα ενδεχόμενα Δ, Β είναι ανεξάρτητα. Προφανώς τα ενδεχόμενα Α, Β, Δ δεν είναι πλήρως ανεξάρτητα.

Τέλος, η έννοια της ανεξαρτησίας πειραμάτων αναδεικνύεται πολλές φορές από τη φύση των προβλημάτων που αντιμέτωπίζουμε. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε την ακολουθία ρίψεων ενός ζαριού δεν έχουμε καμμιά ένδειξη ότι το αποτέλεσμα μιας οποιαδήποτε ρίψης επηρεάζει το αποτέλεσμα άλλης ρίψης. Συνεπώς, αν θέλουμε να υπολογίσουμε τη πιθανότητα σε 5 ρίψεις ενός ζαριού να εμφανισθεί το ενδεχόμενο Ε=(2, 3, 1, 1, 5) είναι λογικό να απαντήσουμε $P(E) = (\frac{1}{6})(\frac{1}{6})(\frac{1}{6})(\frac{1}{6})(\frac{1}{6}) = (\frac{1}{6})^5$. Τα πειράματα δεν είναι απαραίτητα να είναι ίδια. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ότι σε περιττές ρίψεις ρίχνουμε ένα ζάρι και σε άρτιες ρίψεις ρίχνουμε ένα νόμισμα σε σύνολο πάλι 5 συνολικών πειραμάτων. Έστω ότι ενδιαφερόμαστε για το ενδεχόμενο Ε=(2, Κ, 1, Κ, 5). Τότε η πιθανότητα είναι $P(E) = \frac{1}{6}\frac{1}{2}\frac{1}{6}\frac{1}{2}\frac{1}{6} = (\frac{1}{6})^3(\frac{1}{2})^2$.

Ορισμός 1.9. *Μια ακολουθία πειραμάτων τύχης, έστω* $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$*, καλείται ανεξάρτητη ακολουθία πειραμάτων ή δοκιμών αν για οποιαδήποτε ενδεχόμενα* $\{A_1, \ldots, A_n\}$ *τέτοια ώστε το* $A_i, i = 1, \ldots, n$ *να συνδέεται με το πείραμα* $\xi_i, i = 1, \ldots, n$ *ισχύει η σχέση*

$$P(A_1 \cap A_2 \ldots, \ldots, \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \ldots P(A_n).$$

Παραδείγματα

29. Έστω το τυχαίο πείραμα της ρίψης 2 ζαριών και τα εξής ενδεχόμενα:
Α="Η πρώτη ένδειξη είναι 1 ή 2 ή 3"
Β="Η πρώτη ένδειξη είναι 3 ή 4 ή 5"
Γ="Το άθροισμα των δύο ενδείξεων είναι 9"
Είναι τα Α, Β, Γ ανεξάρτητα;

Ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{(1,1), \ldots, (1,6), (2,1), \ldots, (2,6), \ldots (6,1), \ldots, (6,6)\}$ και για τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ, ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ, ΑΒΓ έχουμε
$A = \{(1,1), \ldots, (1,6), (2,1), \ldots, (2,6), (3,1), \ldots, (3,6)\}$
$B = \{(3,1), \ldots, (3,6), (4,1), \ldots, (4,6), (5,1), \ldots, (5,6)\}$
$\Gamma = \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\}$
$AB = \{(3,1), \ldots, (3,6)\}$ $A\Gamma = \{(3,6)\}$ $B\Gamma = \{(3,6), (4,5), (5,4)\}$
$AB\Gamma = \{(3,6)\}$.

Άρα οι πιθανότητες είναι

$$P(A) = 18/36, P(B) = 18/36, P(\Gamma) = 4/36, P(AB) = 6/36, P(A\Gamma) = 1/36,$$

$$P(B\Gamma) = 3/36, P(AB\Gamma) = 1/36.$$

Παρατηρούμε ότι

$$P(AB) = 1/6 \neq P(A)P(B) = 1/4, P(A\Gamma) = 1/36 \neq P(A)P(\Gamma) = 1/18,$$

και

$$P(B\Gamma) = 1/12 \neq P(B)P(\Gamma) = 1/18$$

αλλά

$$P(AB\Gamma) = 1/36 = P(A)P(B)P(\Gamma),$$

άρα τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ δεν είναι πλήρως ανεξάρτητα.

30. Συνέχεια του προηγούμενου παραδείγματος με ενδεχόμενα:

Α="Η πρώτη ένδειξη είναι 1 ή 2 ή 3"
Β="Η πρώτη ένδειξη είναι 4 ή 5 ή 6"
Γ="Το άθροισμα των δύο ενδείξεων είναι 7".

Εύκολα υπολογίζουμε τις πιθανότητες και διαπιστώνουμε ότι

$$P(AB) = 1/4 = P(A)P(B), P(A\Gamma) = 1/12 = P(A)P(\Gamma), P(B\Gamma) = 1/12 = P(B)P(\Gamma),$$

αλλά

$$P(AB\Gamma) = 1/12 \neq P(A)P(B)P(\Gamma) = 1/24.$$

Άρα τα ενδεχόμενα A, B, Γ είναι ανά δύο ανεξάρτητα, αλλά όχι πλήρως.

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας και Θεώρημα Bayes

Ας θεώρησουμε ένα ενδεχόμενο A και το συμπληρωματικό του A'. Γνωρίζουμε ότι ο δειγματικός μας χώρος διαμερίζεται ως εξής: $\Omega = A \cup A'$. Γενικά, αν τα ενδεχόμενα $\{A_1, \ldots, A_\nu\}$ είναι τέτοια ώστε $A_iA_j = \emptyset \ \forall\, i \neq j \ i, j = 1, \ldots, \nu$ και

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\nu = \Omega,$$

τότε αποτελούν μία **διαμέριση** του δειγματικού χώρου Ω. Η απλούστερη διαμέριση του Ω είναι η $\{A, A'\}$.

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Έστω μία διαμέριση $\{A_1, \ldots, A_\nu\}$ του δειγματικού χώρου Ω και ένα ενδεχόμενο $B \in \mathcal{A}$. Ισχύει η σχέση

$$P(B) = P(A_1) \times P(B|A_1) + P(A_2) \times P(B|A_2) + \ldots P(A_\nu) \times P(B|A_\nu). \quad (1.17)$$

Απόδειξη

Το ενδεχόμενο B μπορεί να εκφρασθεί σε συνάρτηση με τα $A_i, i = 1, \ldots, \nu$ ως εξής:

$$B = BA_1 \cup BA_2 \cup, \ldots, \cup BA_\nu.$$

Τα ενδεχόμενα $BA_i, i = 1, \ldots, \nu$ είναι ξένα. Από το τρίτο αξίωμα και τον πολλαπλασιαστικό τύπο έχουμε

$$\begin{aligned} P(B) &= P(BA_1) + P(BA_2) + \times + P(BA_\nu) \\ &= P(A_1) \times P(B|A_1) + P(A_2) \times P(B|A_2) + \ldots + P(A_\nu) \times P(B|A_\nu) \\ &= \sum_{i=1}^{\nu} P(A_i)P(B|A_i). \end{aligned}$$

Θεώρημα Bayes

Έστω ότι ισχύουν όλες οι υποθέσεις του θεωρήματος ολικής πιθανότητας. Τότε

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{\nu} P(A_i)P(B|A_i)} \; i = 1, \ldots, \nu. \quad (1.18)$$

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι άμεση από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας και την εφαρμογή του θεωρήματος ολικής πιθανότητας, αφού

$$P(A_i|B) = \frac{P(BA_i)}{P(B)}.$$

Η πιθανότητα $P(A_i|B)$ καλείται εκ των υστέρων πιθανότητα (a posteriori) σε αντίθεση με την $P(B|A_i)$ που καλείται εκ των προτέρων πιθανότητα (a priori). Με βάση την εκ των υστέρων πιθανότητα έχει αναπτυχθεί ένας κλάδος της Στατιστικής που καλείται Bayesian Statistics.

Τα παραπάνω θεωρήματα είναι ιδιαίτερα χρήσιμα τόσο για τις εφαρμογές τους όσο και για τη συνεισφορά τους σε αποδεικτικές διαδικασίες άλλων αποτελεσμάτων.

Παραδείγματα

31. Ένα επικοινωνιακό κανάλι μεταδίδει σήματα 0 και 1. Το κανάλι μεταδίδει το σήμα 0 σωστά με πιθανότητα 0,94 και το σήμα 1 με πιθανότητα 0,91.Επιπλέον γνωρίζουμε ότι το 45% των σημάτων είναι 0. Ένα σήμα μεταδίδεται. Θέλουμε να υπολογίσουμε τις ακόλουθες πιθανότητες:
α) Το σήμα που φθάνει να είναι 1. β) Το σήμα που φθάνει να είναι 0. γ) Δεδομένου ότι φθάνει σήμα 1 να είχε μεταδοθεί 1. δ) Δεδομένου ότι φθάνει σήμα 0 να είχε μεταδοθεί 0. ε) Η πιθανότητα "σφάλματος".

Έστω τα ενδεχόμενα:
A_0 = μεταδίδεται το σήμα 0
A_1 = μεταδίδεται το σήμα 1
B_0 = φθάνει το σήμα 0
B_1 = φθάνει το σήμα 1

Για τα α) και β) εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας.

α)

$$P(B_1) = P(A_0)P(B_1|A_0)+P(A_1)P(B_1|A_1) = 0,45\times0,06+0,55\times0,91 = 0,5275.$$

β)

$$P(B_0) = P(A_0)P(B_0|A_0)+P(A_1)P(B_0|A_1) = 0,45\times0,94+0,55\times0,09 = 0,4725.$$

Για τα γ) και δ) εφαρμόζουμε το θεώρημα Bayes.

γ)

$$P(A_1|B_1) = \frac{P(A_1)P(B_1|A_1)}{P(B_1)} = \frac{0,55\cdot0,91}{0,5275} = 0,9488$$

δ)

$$P(A_0|B_0) = \frac{P(A_0)P(B_0|A_0)}{P(B_0)} = \frac{0,45\cdot0,94}{0,4725} = 0,8952.$$

ε)Είναι φανερό ότι για να εντοπισθεί σφάλμα πρέπει να μεταδοθεί 0 και να φθάσει 1 ή να μεταδοθεί 1 και να φθάσει 0. Αυτά τα δύο ενδεχόμενα είναι ξένα και εφαρμόζοντας το τρίτο αξίωμα μαζί με τον πολλαπλασιαστικό τύπο και τις πιθανότητες που υπολογίσαμε στα προηγούμενα ερωτήματα έχουμε

$$\begin{aligned}
P(\text{σφάλματος}) &= P(A_0B_1 \cup A_1B_0) \\
&= P(B_1)P(A_0|B_1) + P(B_0)P(A_1|B_0) \\
&= 0,5274\cdot(1-0,9488) + 0,4725\cdot(1-0,8952) = 0,0765.
\end{aligned}$$

32. Ας θεωρήσουμε δύο κάλπες, έστω τις I και II. Η I περιέχει 10 άσπρες και 6 κόκκινες αριθμημένες σφαίρες, ενώ η II περιέχει 8 άσπρες και 12 κόκκινες αριθμημένες σφαίρες. Το τυχαίο πείραμα που γίνεται είναι το εξής: από την I εξάγονται 2 σφαίρες και μεταφέρονται στην II. Στη συνέχεια από την II εξάγεται μία σφαίρα. Ζητάμε τις πιθανότητες α) Να εξαχθεί από την II κόκκινη σφαίρα και β) Δεδομένου ότι από την II πήραμε κόκκινη σφαίρα να είχαμε μεταφέρει από την I στην II 1 άσπρη και 1 κόκκινη .

Έστω τα ενδεχόμενα:
A_1= "μεταφέρονται 2 άσπρες σφαίρες από την I στην II".
A_2= "μεταφέρεται μία άσπρη και 1 κόκκινη σφαίρα από την I στην II".
A_3= "μεταφέρονται 2 κόκκινες σφαίρες από την I στην II".
B = "εξάγεται άσπρη σφαίρα από την II".

Σύμφωνα με τα παραπάνω θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες $P(B)$ και $P(A_2|B)$, την πρώτη εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας και τη δεύτερη το θεώρημα Bayes. Είναι

$$\begin{aligned} P(B &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(AB|A_3) \\ &= \frac{\binom{10}{2}}{\binom{16}{2}} \cdot \frac{\binom{10}{1}}{\binom{22}{1}} + \frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{16}{2}} \cdot \frac{\binom{9}{1}}{\binom{22}{1}} + \frac{\binom{6}{2}}{\binom{16}{2}} \cdot \frac{\binom{8}{1}}{\binom{22}{1}}. \end{aligned}$$

β)

$$P(A_2|B) = \frac{\binom{10}{1} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{16}{2}} \cdot \frac{\binom{9}{1}}{\binom{22}{1}}.$$

33. Έστω ότι ένα μόριο μπορεί να εξαφανισθεί ή να μεταλλαχθεί σε ένα νέο μόριο, ή σε δύο νέα μόρια με πιθανότητες αντίστοιχα 1/4, 1/2, 1/4. Παρατηρούμε ένα τέτοιο μόριο αρχικά το οποίο καλούμε X_0 μηδενική γενιά και έστω X_ν ο αριθμός των μορίων της ν-οστής γενιάςς $\nu = 1, 2, \ldots$. Ζητάμε τις πιθανότητες α) $P(X_2 > 0$ και β)$P(X_1|X_2 = 0)$.

Έστω τα ενδεχόμενα:
$A_0 =$ το αρχικό μόριο εξαφανίζεται κατά την πρώτη γενιά.
$A_1 =$ το αρχικό μόριο μεταλλάσσεται σε ένα νέο.
$A_2 =$ το αρχικό μόριο μεταλλάσσεται σε δύο νέα μόρια
$B_0 =$ κατά την δεύτερη γενιά έχουμε μηδέν μόρια

Τότε για την α) πιθανότητα έχουμε από το θεώρημα ολικής πιθανότητας

$$\begin{aligned}
P(X_2 > 0) &= 1 - P(X_2 = 0) = 1 - P(B_0) \\
&= 1 - [P(A_0)P(B_0|A_0) + P(A_1)P(B_0|A_1) + P(A_2)P(B_0|A_2)] \\
&= 1 - [1/4 \cdot 1 + 1/2 \cdot 1/4 + 1/4(1/4)^2] = 39/64.
\end{aligned}$$

Για την β) πιθανότητα εφαρμόζουμε το θεώρημα Bayes και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα έχουμε

$$P(X_1 = 1|X_2 > 0) = P(A_1|B_0) = \frac{P(A_1)P(B_0|A_1)}{P(B_0)} = \frac{1/2 \cdot 1/4}{39/64} = 8/39.$$

34. Έστω ότι ένα τεστ αίματος που γίνεται για την ανίχνευση μιας σπάνιας ασθένειας είναι αποτελεσματικό με πιθανότητα 0,99 για όσους πάσχουν. Το ποσοστό των πασχόντων έχει εκτιμηθεί σε 1 άτομο στα 1000. Ένα άτομο εκλέγεται στην τύχη και υποβάλλεται στο τεστ. Ποια είναι η πιθανότητα το τεστ να είναι θετικό;

Έστω τα ενδεχόμενα A=το άτομο πάσχει, A'= το άτομο δεν πάσχει και B=το τεστ είναι θετικό. Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου B. Παρατηρούμε ότι το B συμβαίνει σε συνδυασμό με ένα από τα ενδεχόμενα A ή A'. Άρα από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας έχουμε

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(B|A') = 0,001 \cdot 0,99 + 0,999 \cdot 0,01 = 0,01$$

Ποιά είναι η πιθανότητα δεδομένου ότι το τεστ είναι θετικό το άτομο να πάσχει από την ασθένεια; Από το Θεώρημα Bayes έχουμε

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{0,00099}{0,01} = 0,099.$$

Στην κατηγορία αυτών των προβλημάτων μεγάλης σημασίας είναι η πιθανότητα $P(A|B')$ η οποία πρέπει να είναι μικρή για να είναι το τεστ αξιόπιστο. Η πιθανότητα αυτή καλείται "συντελεστής ευαισθησίας του τεστ". Στο παράδειγμά μας είναι:

$$P(A|B') = \frac{P(A)P(B'|A)}{P(B')} = \frac{0,001 \cdot 0,01}{0,001 \cdot 0,01 + 0,99 \cdot 0,99} = 0,00001.$$

1.5 Ασκήσεις

1. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και A, B, Γ ενδεχόμενα. Να περιγραφούν με πράξεις συνόλων τα ακόλουθα ενδεχόμενα: α) "Μόνο το A συμβαίνει", β) "Συμβαίνουν τα A, B και όχι το Γ",
γ) "τουλάχιστον ένα από τα A, B, Γ συμβαίνει", δ)"τουλάχιστον δύο από τα A, B, Γ συμβαίνουν", ε) "συμβαίνουν και τα τρία ενδεχόμενα", ζ) "κανένα από τα A, B, Γ συμβαίνει", η) "το πολύ ένα από τα A, B, Γ συμβαίνει", θ)" ακριβώς 2 από τα A, B, Γ συμβαίνουν", ι) "το πολύ 3 από τα A, B, Γ συμβαίνουν".

2.Έστω το τυχαίο πείραμα της ρίψης 2 ζαριών και τα εξής ενδεχόμενα: A="το άθροισμα των ενδείξεων είναι άρτιος αριθμός, B="το πρώτο ζάρι έφερε 1", και Γ=" το άθροισμα είναι 6". Να περιγραφούν με στοιχειώδη ενδεχόμενα τα ακόλουθα: α) $A \cap B$, β)$A \cup B$, γ) $B \cap \Gamma G$, δ)B', ε)$A' \cap \Gamma$, ζ)$A \cap B \cap \Gamma$.

3. Σε μία έρευνα που έγινε οι φοιτητές και οι φοιτήτριες της Σχολής Θετικών Επιστημών διαβάζουν τα περιοδικά I, II και III σε ποσοστά 10, 30, 5 αντίστοιχα. Επίσης, διαβάζουν τα I και II σε ποσοστό 8, τα I και III σε ποσοστό 2, τα II και III σε ποσοστό 4 και τα I και II και III σε ποσοστό 1. Ένας φοιτητής (τρια) εκλέγεται στην τύχη. Ποιά είναι η πιθανότητα α) να διαβάζει μόνο ένα περιοδικό, β) να διαβάζει τουλάχιστον 2 περιοδικά, γ) αν τα περιοδικά I και II είναι εβομαδιαία και το III είναι μηνιαίο ποιά είναι η πιθανότητα να διαβάζει τουλάχιστον ένα εβδομαδιαίο και το μηνιαίο;

4. Στο παιχνίδι του πόκερ "ένα χέρι χαρτιά" είναι 5 χαρτιά που παίρνονται τυχαία από μία συνήθη τράπουλα 52 χαρτιών. Υποθέτουμε ότι όλες οι δυνατές πεντάδες που είναι $\binom{52}{5}$ είναι ισοπίθανες. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες:
α) Σε ένα χέρι χαρτιά όλα να είναι του ιδίου τύπου, δηλ. καρώ, μπαστούνια, σπαθιά, κούπες.
β) Σε ένα χέρι χαρτιά να υπάρχει ένα ζευγάρι, δηλ. 1,1 ή 2,2 , ή κ.λ.π. ή 10, 10 ή δύο ίδιες φιγούρες.
γ) Σε ένα χέρι χαρτιά να υπάρχουν δύο ζευγάρια όπως αυτά του β).
δ) Σε ένα χέρι χαρτιά να υπάρχει τουλάχιστον μία κούπα.
(Τα 52 χαρτιά της τράπουλας αποτελούνται από 13 κούπες, 13 σπαθιά, 13 μπαστούνια και 13 καρώ).

5. Μία κάλπη A περιέχει 3 κόκκινες και 3 μαύρες σφαίρες, ενώ η μία άλλη κάλπη B περιέχει 4 κόκκινες και 6 μαύρες σφαίρες. Μία σφαίρα εκλέγεται τυχαία από κάθε μία κάλπη. Ποιά είναι η πιθανότητα να είναι και οι δύο του ίδιου χρώματος.

6. Μία ομάδα ατόμων αποτελείται από κ κορίτσι και α αγόρια και τοποθετούνται σε μία σειρά τυχαία, δηλ. η κάθε μετάθεση $(\kappa+\alpha)!$ είναι εξίσου πιθανή.Ποιά είναι η πιθανότητα το άτομο που τοποθετήθηκε στην ν-οστή θέση $\nu = 1, \ldots, \kappa+\nu$ να είναι κορίτσι;

7. Μία γυναίκα έχει ν κλειδιά από τα οποία ένα ανοίγει την πόρτα του γραφείου της. Αν δοκιμάζει στην τύχη και καθένα που δεν ταιριάζει στην πόρτα το βάζει στην άκρη, τότε ποιά είναι η πιθανότητα να ανοίξει την πόρτα της κατά την κ δοκιμή ($\kappa \leq \nu$). Ποιά είναι η πιθανότητα αν δεν βάζει στην άκρη το κλειδί που δοκιμάζει και δεν ταιριάζει στην πόρτα;

8.Έστω το τυχαίο πείραμα της ρίψης ενός αμερόληπτου ζαριού δύο φορές. Ποιά είναι η πιθανότητα δεδομένου ότι οι ενδείξεις είναι διαφορετικές να εμφανισθεί το 6 τουλάχιστον μία φορά; Ποιά είναι η πιθανότητα η πρώτη ένδειξη να είναι 6 δεδομένου ότι το άθροισμα των ενδείξεων είναι κ; Να υπολογισθούν όλες οι πιθανότητες για $2 \leq \kappa \leq 12$.

9.Έστω μια κάλπη που περιέχει 6 άσπρες και 9 μαύρες σφαίρες αριθμημένες. α)Εκλέγονται τυχαία 4 σφαίρες μία-μία χωρίς επανάθεση. Ποιά είναι η πιθανότητα οι πρώτες 2 να είναι άσπρες και οι 2 τελευταίες μαύρες; β)Εκλέγονται τυχαία 4 σφαίρες μία-μία με επανάθεση (χωρίς επανάθεση). Ποιά είναι η δεσμευμένη πιθανότητα (σε κάθε περίπτωση) η πρώτη και η τρίτη να είναι μαύρες δεδομένου ότι η τετράδα που εκλέξαμε περιέχει ακριβώς 3 μαύρες;

10.Ας θεωρήσουμε τις κάλπες Α, Β, και Γ που περιέχουν 2 άσπρες και 4 κόκκινες , 8 άσπρες και 4 κόκκινες και 1 άσπρη και 3 κόκκινες αριθμημένες σφαίρες αντίστοιχα. Μία σφαίρα εκλέγεται τυχαία από κάθε μια κάλπη. Ποιά είναι η πιθανότητα να έχουμε εκλέξει άσπρη από την Α δεδομένου ότι ακριβώς 2 άσπρες σφαίρες έχουν εκλεγεί;

11. Σε ένα πληθυσμό το 5% των ανδρών και το 0,5% των γυναικών έχουν αχρωματοψία.Ένα άτομα εκλέγεται στην τύχη. Ποιά είναι η πιθανότητα να πάσχει από αχρωματοψία αν ο πληθυσμός αποτελείται από 45% άνδρες και 55% γυναίκες; Αν το άτομο που κλεξαμε πάσχει από αχρωματοψία ποιά είναι η πιθανότητα να είναι γυναίκα;

12. Στο μάθημα των Πιθανοτήτων και Στατιστικής έχουμε τα τμήματα Ι και ΙΙ που αποτελούνται από 30 φοιτήτριες και φοιτητές.Έστω ότι στο τμήμα Ι 15 είναι πολύ καλοί, 10 μέτριοι και 5 κάτω από τη βάση, ενώ στο ΙΙ 10 είναι πολύ καλοί, 12 μέτριοι και 8 κάτω από τη βάση. Στις τελικές εξετάσεις τα γραπτά αναμειγνύονται και βαθμολογούνται. Ένα γραπτό εκλέγεται στην τύχη και είναι μέτριο. Ποιά είναι η πιθανότητα να προέρχεται από το τμήμα ΙΙ; Ποιά είναι η πιθανότητα το γραπτό να ανήκει σε πολύ καλή φοιτήτρια (τή);

13.Το τεστ Παπανικολάου για τον καρκίνο της μήτρας έχει πιθανότητα ορθής διάγνωσης 0,98. Σε ένα πληθυσμό έχει παρατηρηθεί ότι το ποσοστό των γυναικών που αναπτύσσουν καρκίνο της μήτρας είναι 15%. Μία γυναίκα εκλέγεται τυχαία, υποβάλλεται στο τεστ και το τεστ δείχνει θετικό. Ποιά είναι η πιθανότητα πράγματι να πάσχει από καρκίνο; Αν το τεστ είναι αρνητικό ποιά είναι η πιθανότητα να πάσχει;

14.Μία κάλπη Α περιέχει 5 άσπρες και 7 μαύρες αριθμημένες σφαίρες, ενώ μία άλλη Β περιέχει 3 άσπρες και 12 μαύρες αριθμημένες σφαίρες. Από κάθε μία κάλπη εκλέγεται τυχαία μία σφαίρα και ανταλλάσσονται. Τελικά από την Β εκλέγεται μία σφαίρα και διαπιστώνεται ότι είναι μαύρη. Ποιά είναι η πιθανότητα να είχαν εκλεγεί μαύρες σφαίρες κατά το τυχαίο πείραμα που προηγήθηκε;

15. Τα καταστήματα Α, Β και Γ απασχολούν 50, 75 και 100 εργαζόμενους αντίστοιχα, από τους οποίους 50, 60 και 70 στους εκατό είναι γυναίκες. Οι παραιτήσεις των εργαζομένων θεωρούνται ισοπίθανες μεταξύ ανδρών και γυναικών. Ένας (μία) εργαζόμενος (νη) παραιτείται και διαπιστώνεται ότι είναι γυναίκα. Ποιά είναι η πιθανότητα να προέρχεται από το κατάστημα Γ;

16.Μία κάλπη περιέχει 5 άσπρες και 10 πράσινες αριθμημένες σφαίρες. Ένα αμερόληπτο ζάρι ρίχνεται και η ένδειξη που φέρει είναι ο αριθμός των σφαιρών που εκλέγονται τυχαία από την κάλπη.Ποιά είναι η πιθανότητα να είναι όλες πράσινες; Ποιά είναι η πιθανότητα το ζάρι να έφερε την ένδειξη 3 δεδομένου ότι όλες οι σφαίρες που εκλέχθησαν από την κάλπη ήταν πράσινες;

17.Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:
α) Αν το ενδεχόμενο Α είναι ανεξάρτητο του Β και το Α είναι ανεξάρτητο του Γ, τότε το Α είναι ανεξάρτητο του $B \cup \Gamma$.
β) Αν το ενδεχόμενο Α είναι ανεξάρτητο του Β και το Α είναι ανεξάρτητο του Γ και $B \cap \Gamma = \emptyset$, τότε το Α είναι ανεξάρτητο του $B \cup \Gamma$.
γ) Αν το ενδεχόμενο Α είναι ανεξάρτητο του Β και το Β ανεξάρτητο του Γ και το Α ανεξάρτητο του $B \cap \Gamma$, τότε το Γ είναι ανεξάρτητο του $A \cap B$.

18.Το πρόβλημα των γενεθλίων: Από ένα πληθυσμό εκλέγονται τυχαία κ άτομα.Ποιά είναι η πιθανότητα τουλάχιστον 2 να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα. Ποιά είναι η πιθανότητα ν από τα κ άτομα να έχουν γεννηθεί την ίδια μέρα; Ποιά είναι η πιθανότητα ν από τα κ άτομα να έχουν γεννηθεί την 1η Απριλίου; Θεωρούμε ότι το έτος έχει 365 μέρες και όλες οι μέρες είναι εξίσου πιθανές για οποιαδήποτε γέννηση.

19. Ένα αμερόληπτο ζάρι ρίχνεται 2 φορές. Έστω τα ενδεχόμενα:
Α=“και οι δύο ενδείξεις είναι ίδιες”, Β=“το άθροισμα των ενδείξεων είναι ≤ 3”, Γ=“το άθροισμα είναι περιττός αριθμός”, Δ=“ το άθροισμα των ενδείξεων

είναι διαιρετό με το 3". Να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(A), P(B), P(\mathit{\Gamma})$, $P(B|A), P(A|G), P(\mathit{\Delta}|\mathit{\Gamma})$.

20. Ένα αμερόληπτο ζάρι ρίχνεται 2 φορές. Έστω τα ενδεχόμενα: Α="Το άθροισμα των ενδείξεων είναι άρτιος αριθμός", Β="η πρώτη ένδειξη δείχνει 1", Γ="το άθροισμα των ενδείξεων είναι 6". Να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(A), P(B), P(\mathit{\Gamma}), P(B|A), P(A|B), P(\mathit{\Gamma}|B), P(A \cup B), P(A'B')$, $P(AB' \cup A'B)$.

21. Ένας ανιχνευτής ορισμένου μετάλλου είναι ακριβής με πιθανότητα 0,98. Είναι γνωστό ότι μία περιοχή περιέχει το συγκεκριμένο μέταλλο σε ποσοστό 65%. ''Ενα δείγμα λαμβάνεται τυχαία από την περιοχή αυτή και χρησιμοποιείται ο ανιχνευτής για να εξακριβωθεί αν περιέχει το μέταλλο. Ποια είναι η πιθανότητα να δείξει ότι το μέταλλο περιέχεται; Ποια είναι η πιθανότητα δεδομένου ότι ο ανιχνευτής δείχνει ότι περιέχεται το μέταλλο, πράγματι αυτό να περιέχεται στο δείγμα;

22. Έστω οι κάλπες Ι και ΙΙ, οι οποίες περιέχουν σφαίρες ίδιου μεγέθους και διαφορετικού υλικού ως εξής αντίστοιχα: η Ι περιέχει 2 από αμέθυστο και 4 από αχάτη, ενώ η ΙΙ 6 από αμέθυστο και 3 από αχάτη. Το πείραμα τύχης έχει ως εξής: Η Ι κάλπη επιλέγεται αν η ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού φέρει αριθμό διαιρετό με το 3, διαφορετικά επιλέγεται η κάλπη ΙΙ και από αυτήν εξάγεται τυχαία μία σφαίρα. α) Να υπολογισθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου Α:επιλέγεται σφαίρα από αμέθυστο. β) Να υπολογισθεί η πιθανότητα δεδομένου ότι η σφαίρα είναι από αμέθυστο να έχει επιλεγεί η κάλπη ΙΙ.

23. Μια συσκευασία , έστω Α, 24 βολβών για κρινάκια περιέχει 8 βολβούς για κίτρινα κρινάκια, 8 για άσπρα και 8 για μοβ, ενώ μια άλλη συσκευασία, έστω Β, 24 βολβών για κρινάκια περιέχει 6 για κίτρινα, 6 για άσπρα και 12 για μοβ. Μια συσκευασία εκλέγεται στην τύχη, 3 βολβοί εκλέγονται τυχαία και φυτεύονται. Έστω το ενδεχόμενο : 1 κίτρινο, 1 άσπρο και 1 μοβ κρινάκι ανθίζει. Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου ; Ποια είναι η πιθανότητα δεδομένου ότι συνέβη το να είχαμε επιλέξει τη συσκευασία Β;

24. Έχει παρατηρηθεί ότι ένας φοιτητής ή φοιτήτρια που παρακολουθεί τα μαθήματα Στατιστικής έχει πιθανότητα 0,95 να πετύχει στις εξετάσεις του μαθήματος, ενώ αν δεν παρακολουθεί έχει πιθανότητα 0,20. Επίσης έχει παρατηρηθεί ότι μόνο το 25

Κεφάλαιο 2

Τυχαίες Μεταβλητές

2.1 Εισαγωγικές Έννοιες

Μέχρι τώρα έχουμε μελετήσει τα πειράματα τύχης χρησιμοποιώντας τον δειγματικό χώρο και τον χώρο ενδεχομένων. Πολλές φορές οι δειγματικοί χώροι δεν περιγράφονται με αριθμούς που μας είναι περισσότερο εύχρηστοι από μαθηματικοί άποψη. Για το λόγο αυτό μπορούμε να ορίσουμε πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού τον δειγματικό χώρο. Αυτές οι οι συναρτήσεις είναι γνωστές ως τυχαίες μεταβλητές. Για να γίνει σαφής η αναγκαιότητα αυτή, καθώς και η απλούστευση που επιτυγχάνεται παραθέτουμε τα ακόλουθα παραδείγματα προτού δώσουμε τον ορισμό της τυχαίας μεταβλητής.

Παραδείγματα

1. Ας θεωρήσουμε το τυχαίο πείραμα της ρίψης ενός νομίσματος τρεις φορές. Έστω Y ο αριθμός των "K" που εμφανίζονται. Τότε τα στοιχειώδη ενδεχομένα μας δίνουν τις τιμές $Y(\Gamma\Gamma\Gamma)=0, Y(\Gamma\Gamma K)=Y(\Gamma K\Gamma)=Y(K\Gamma\Gamma)=1, Y(KK\Gamma)=Y(K\Gamma K)=Y(\Gamma KK)=2, Y(KKK)=3$. Δηλ. η Y είναι μία μεταβλητή που παίρνει τις τιμές $\{0,1,2,3\}$ με αντίστοιχες πιθανότητες

$$\begin{aligned}
P(Y=0) &= P(\{\Gamma\Gamma\Gamma\})=1/8\\
P(Y=1) &= P(\{\Gamma\Gamma K, \Gamma K\Gamma, K\Gamma\Gamma\})=3/8\\
P(Y=2) &= P(\{\Gamma KK, K\Gamma K, KK\Gamma\})=3/8\\
P(Y=3) &= P(\{KKK\})=1/8.
\end{aligned}$$

Αφού η Y παίρνει μία από τις τιμές $\{0,1,2,3\}$ πρέπει να είναι

$$P(\cup_{i=0}^{i=3}\{Y=i\})=\sum_{i=1}^{i=3}P(Y=i)=1$$

το οποίο προφανώς ισχύει.

2.Ας θεωρήσουμε το τυχαίο πείραμα μιας ακολουθίας ρίψεων ενός νομίσματος έως ότου εμφανισθεί “Κ” ή να συμπληρωθούν ν ρίψεις. Έστω ότι η πιθανότητα το νόμισμα να φέρει “Κ” είναι p και να φέρει “Γ” q=1-p Έστω X ο αριθμός των απαιτουμένων ρίψεων για το φαινόμενο που μας ενδιαφέρει. Τότε η μεταβλητή παίρνει τις τιμές $\{1, 2, \dots, \nu\}$ με αντίστοιχες πιθανότητες

$$\begin{aligned}
P(X=1) &= P(\{K\}) = p \\
P(X=2) &= P(\{\Gamma K\}) = qp \\
P(X=3) &= P(\{\Gamma\Gamma K\}) = q^2 p \\
P(X=\nu-1) &= P(\{\Gamma\Gamma\Gamma\dots\Gamma K\}) = q^{n-2}p \\
&\vdots \\
P(X=\nu) &= P(\{\Gamma\Gamma\Gamma\dots,\Gamma\Gamma\Gamma\}\text{ή}\{\Gamma\Gamma\Gamma\dots,\Gamma\Gamma K\}) = q^{\nu} + q^{\nu-1}p \\
&= q^{\nu-1}[q+p] = q^{\nu-1}.
\end{aligned}$$

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι

$$P(\cup_{\kappa=1}^{\kappa=\nu}\{X=\kappa\}) = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=\nu} P(X=\kappa) = 1.$$

3.Έστω το τυχαίο πείραμα της ρίψης 2 αμερόληπτων διακεκριμένων ζαριών. Ορίζουμε τη μεταβλητή X ως το άθροισμα των ενδείξεων. Η μεταβλητή X παίρνει τις τιμές $\{2, 3, 4, \dots, 12\}$ με αντίστοιχες πιθανότητες

$$\begin{aligned}
P(X=2) &= P(\{1,1\}) = 1/36 \\
P(X=3) &= P(\{1,2\},\{2,1\}) = 2/36 \\
P(X=4) &= P(\{2,2\},\{1,3\},\{3,1\}) = 3/36 \\
P(X=5) &= P(\{1,4\},\{2,3\},\{3,2\},\{4,1\}) = 4/36 \\
&\vdots \\
P(X=11) &= P(\{5,6\},\{6,5\}) = 2/36 \\
P(X=12) &= P(\{6,6\}) = 1/36
\end{aligned}$$

Είναι προφανές ότι

$$P(\cup_{\kappa=1}^{\kappa=12}\{X=\kappa\}) = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=12} P(X=\kappa) = 1.$$

Ορισμός 2.1. *Μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, δηλ.*

$$\mathbf{\Omega} \xrightarrow{\mathbf{X}} \mathbf{R}$$

καλείται **Τυχαία Μεταβλητή**.

Συνήθως γράφουμε R_X για το πεδίο τιμών της X, που μπορεί να είναι ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών ή όλοι οι πραγματικοί αριθμοί. Οι τυχαίες μεταβλητές συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα, ενώ οι συγκεκριμένες τιμές τους με μικρά, δηλ. $X, \Psi, Z, \Sigma, \ldots$ και $X = \chi, \Psi = \psi, Z = \zeta, \ldots$.

Από τον ορισμό είναι φανερό ότι σε κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο $\{\omega\}$ του δειγματικού χώρου Ω η τυχαία μεταβλητή αντιστοιχεί έναν αριθμό. Παρατηρούμε ότι διαμερίζει τον δειγματικό χώρο Ω σε ξένα μεταξύ τους υποσυνόλα, τα οποία αποτελούν όλον το δειγματικό χώρο Ω.Έτσι για μία τυχαία μεταβλητή και συγκεκριμένο $\{\chi\}$, ορίζουμε το ενδεχόμενο A_χ, δηλ.την αντίστροφη εικόνα του $\{\chi\}$, ως το υποσύνολο του Ω για τα στοιχεία του οποίου η τυχαία μεταβλητή X μας δίνει την τιμή $\{\chi\}$. Είναι

$$A_\chi = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = \chi\}$$

Είναι φανερό ότι

$$A_\chi \cap A_y = \emptyset \text{ αν} \chi \neq y \text{ και} \cup_{\chi \in R} A_\chi = \Omega.$$

Το νέο χώρο ενδεχομένων τον συμβολίζουμε με $\mathcal{B}$, το οποίο είναι μία σ-άλγεβρα και καλείται σύνολο Borel. Αν $B \in \mathcal{B}$, τότε έχουμε

$$X^{-}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = A \in \mathcal{A}.$$

Δεν θα εξηγήσουμε περαιτέρω τη σημασία του συνόλου αυτού γιατί είναι πέραν του σκοπού αυτών των σημειώσεων. Μένει να δώσουμε ένα ορισμό για την πιθανότητα με βάση τα καινούργια δεδομένα μας.

Ορισμός 2.2. *Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ενός πειράματος τύχης. Έστω η τυχαία μεταβλητή X, το πεδίο τιμών της R_X και το σύνολο ενδεχομένων της $\mathcal{B}$. Η πιθανότητα $P_X(\cdot)$ είναι μία συνολοσυνάρτηση που ορίζεται από τη σχέση*

$$\mathbf{P_X(B) = P[X^{-1}(B)]},\ \forall \mathbf{B} \in \mathcal{B}.$$

Η πιθανότητα αυτή καλείται **κατανομή πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X**.

Η συνολοσυνάρτηση $P_X(\cdot)$ όπως ορίστηκε παραπάνω πληρεί τα αξιώματα του Kolmogorov.

Η τριάδα $(\mathbf{R_X}, \mathcal{B}, \mathbf{P_X}(\cdot))$ καλείται χώρος πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X.

Για να κάνουμε πιο σαφή τα παραπάνω, ας θεωρήσουμε τα ακόλουθα παραδείγματα.

4. Συνέχεια του παραδείγματος 1. Έχουμε ότι $R_X = \{0,1,2,3\}$ και $= \{\{0\}, \dots, \{3\}, \{0,1\}, \dots, \{2,3\}, \{0,1,2\},$
$\dots, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}, \{\emptyset\}\}$, δηλ. το σύνολο ενδεχομένων $\mathcal{B}$ αποτελείται από $2^4 = 16$ ενδεχόμενα, όσα είναι τα δυνατά υποσύνολα που μπορούμε να κατασκευάσουμε από το σύνολο R_X. Ας υπολογίσουμε μερικές πιθανότητες με βάση το σύνολο ενδεχομένων $\mathcal{B}$

$$\begin{aligned}
P(\{0,1\}) &= P(\{\Gamma\Gamma\Gamma, K\Gamma\Gamma\Gamma, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K\}) = 1/2 \\
P(\{0,1,2\}) &= P(\{\Gamma\Gamma\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma K\Gamma, K\Gamma\Gamma, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK\}) = 7/8 \\
P(\{0,2,3\}) &= P(\{\Gamma\Gamma\Gamma.KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK, KKK\}) = 5/8 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

5. Συνέχεια του παραδείγματος 3. Η τυχαία μεταβλητή έχει πεδίο τιμών $R_X = \{2, \dots, 12\}$ και το πλήθος των ενδεχομένων είναι 2^{11}. Ας υπολογίσουμε τις πιθανότητες μερικών ενδεχομένων.

$$\begin{aligned}
P(X \le 5) &= P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) \\
&= 1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36 = 10/36 \\
P(2 < X \le 5) &= P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) \\
&= P(X \le 5) - P(X \le 2) = 10/36 - 1/36 = 9/36. \\
P(X \ge 5) &= 1 - P(X \le 4) = 1 - 6/36 = 30/36. \\
P(X \le 1) &= P(\emptyset) = 0, \text{ και} P(X \le x) = 0, \ \forall x \le 1 \\
P(X \le 12) &= 1, \text{ και } P(X \le 15) = 1, \text{ και} P(X \le x) = 1, \ \forall x \ge 12.
\end{aligned}$$

Πολλές φορές πιθανότητες του τύπου $P(X \le x), \forall x \in R_X$ είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για τον υπολογισμό μη στοιχειωδών ενδεχομένων. Ο επόμενος ορισμός εισάγει μία πολύ βασική έννοια της θεωρίας πιθανοτήτων:

Ορισμός 2.3. *Έστω ο χώρος πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής* X $(R_X, \mathcal{B}, P_X(\cdot))$. *Η συνάρτηση*

$$\mathbf{F(x) = P(X \le x)}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

καλείται **αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X** *(cumulative distribution function).*

Το επόμενο θεώρημα είναι βασικό για την απόδειξη των ιδιοτήτων της $F(x)$.

Θεώρημα 2.1. *Έστω ο χώρος πιθανότητας $(R_X, \mathcal{B}, P_X(\cdot))$ της τυχαίας μεταβλητής X και η αθροιστική συνάρτησή της $F(x)$. Ισχύει η σχέση*

$$\mathbf{P}(\alpha < \mathbf{X} \leq \beta) = \mathbf{F}(\beta) - \mathbf{F}(\alpha) \; \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R} \; \mu\varepsilon \alpha \leq \beta.$$

Η απόδειξη είναι απλή και επαφίεται στον αναγνώστη. Άμεση συνέπεια του θεωρήματος είναι οι εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned} P(\alpha \leq X \leq \beta) &= P(\alpha < X \leq \beta) + P(X = \alpha) = F(\beta) - F(\alpha) + P(X = \alpha) \\ P(\alpha < X < \beta) &= P(\alpha < X \leq \beta) - P(X = \beta) = F(\beta) - F(\alpha) - P(X = \beta) \\ P(\alpha \leq X < \beta) &= P(\alpha < X \leq \beta) - P(X = \beta) + P(X = \alpha) \\ &= F(\beta) - F(\alpha) - P(X = \beta) + P(X = \alpha). \end{aligned}$$

Ιδιότητες της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής

Οι παρακάτω ιδιότητες της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής απορρέουν άμεσα από τον ορισμό της και το Θεώρημα 1.

1. $0 \leq F(x) \leq 1$ για $-\infty < x < +\infty$.
2. Είναι αύξουσα συνάρτηση, δηλ. $F(x_1) \leq F(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \quad$ με $\quad x_1 \leq x_2$.
3. Είναι συνεχής από δεξιά, δηλ.

$$F(x+) \equiv lim_{n \to \infty} F(x_n) = F(x), \quad \forall x_n \downarrow x.$$

και

4. Ισχύουν οι σχέσεις

$$F(-\infty) \equiv lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \text{ και} F(+\infty) \equiv lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Στα επόμενα παραδείγματα εφαρμόζουμε τις παραπάνω σχέσεις και δείχνουμε πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής για να υπολογισθεί η πιθανότητα πολυπλοκότερων ενδεχομένων.

6. Έστω το τυχαίο πείραμα της ρίψης ενός αμερόληπτου ζαριού και Χ η ένδειξη της ρίψης. Τότε $R_X = \{1, \ldots, 6\}$. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F(x) = 0, \, \forall x \leq 0, F(1) = 1/6, F(x) = 1/6, \forall x < 2,$$

$$F(2) = 2/6,\ F(x) = 2/6, \forall x < 3,\ F(3) = 3/6,\ F(x) = 3/6, \forall x < 4,$$

$$F(4) = 4/6,\ F(x) = 4/6, \forall x < 5,\ F(5) = 5/6,\ F(x) = 5/6, \forall x < 6,$$

$$F(6) = 6/6 = 1,\ F(x) = 1, \forall x \geq 6.$$

Η γραφική παράσταση της F(x) είναι ένα κλιμακωτό γράφημα με σημεία ασυνέχειας στα σημεία $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

5. Ας θεωρήσουμε το παράδειγμα 3. Η F(X) είναι:

$$F(x) = 0, \forall x < 2,\ F(2) = 1/36,\ F(x) = 1/36\, \forall x < 3$$

$$F(3) = 3/36,\ F(x) = 3/36\, \forall x < 4,\ F(4) = 6/36,\ F(x) = 6/36\, \forall x < 5$$

$$F(5) = 10/36,\ F(x) = 10/36\, \forall x < 6,\ F(6) = 15/36,\ F(x) = 15/36\, \forall x < 7$$

$$F(7) = 21/36,\ F(x) = 21/36\, \forall x < 8,\ F(8) = 26/36,\ F(x) = 26/36\, \forall x < 9$$

$$F(9) = 30/36,\ F(x) = 30/36\, \forall x < 10,\ F(10) = 33/36,\ F(x) = 32/36\, \forall x < 11$$

$$F(11) = 35/36,\ F(x) = 35/36\, \forall x < 11,\ F(12) = 36/36,\ F(x) = 1\, \forall x \geq 12.$$

Ας υπολογίσουμε τις πιθανότητες:
α) $P(X > 6)$, β) $P(4 \leq X \leq 7)$ και γ)$P(X > 6|X > 3)$.
Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1 και τις σχέσεις που απορρέουν άμεσα από αυτό καθώς και τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε για τα α), β), γ) τα εξής:

$$P(X > 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 10/36 = 26/36,$$

$$P(4 \leq X \leq 7) = F(7) - F(4) + P(X = 4) = 21/36 - 6/36 + 3/36 = 18/36,$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 6|X > 3) &= \frac{P(3 < X \leq 6}{P(X > 3}) = \frac{F(6) - F(3)}{1 - F(3)} = \frac{15/36 - 3/36}{1 - 3/36} \\ &= \frac{12/36}{33/36} = \frac{12}{33}. \end{aligned}$$

Αργότερα θα εξετάσουμε αθροιστικές συναρτήσεις τυχαίων μεταβλητών που είναι συνεχείς, όπως είναι ο χρόνος ζωής, ύψος, βάρος, απόσταση, κ.λ.π.

2.2 Διακριτές Κατανομές

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

Ορισμός 2.4. *Μία τυχαία μεταβλητή, έστω X, είναι διακριτή αν το πεδίο τιμών της αποτελείται από πεπερασμένο ή το πολύ αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων. Για μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με* $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, \}$ *η συνάρτηση*

$$\mathbf{f(x_\kappa) = P(X = x_\kappa),\ x_\kappa \in R_X}$$

καλείται **συνάρτηση πιθανότητας***(distibution function) της τυχαίας μεταβλητής X.*

Η συνάρτηση πιθανότητας $f(x_\varkappa)$ ικανοποιεί τις εξής σχέσεις:

$$f(x_\kappa) \geq 0,\ \kappa = 1, 2, \ldots \tag{2.1}$$

$$f(x_\kappa) = 0,\ \forall x_\kappa \in R_X \tag{2.2}$$

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} f(x_\kappa) = 1. \tag{2.3}$$

6.. Ας θεωρήσουμε το παράδειγμα 3 της σελίδας 13. Έστω X ο αριθμός των ελεύθερων tape drives. Έχουμε $R_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ με πιθανότητες

$$f(0) = P(X = 0) = 1/32,\ \ f(1) = P(X = 1) = 5/32,$$

$$f(2) = P(X = 2) = 10/32 \;\; f(3) = P(X = 3) = 10/32,$$
$$f(4) = P(X = 4) = 5/32, \;\; f(5) = P(X = 5) = 1/32.$$

Χρησιμοποιώντας την αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας μπορούμε να υπολογίσουμε διάφορες πιθανότητες ενδεχομένων, όπως για παράδειγμα:
Ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε το πολύ 3 ελεύθερους tape drives;

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 26/32.$$

Όμοια, η πιθανότητα να έχουμε περισσότερους από 2 και το πολύ 4 είναι

$$P(2 < X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 2) = 31/32 - 16/32 = 15/32$$

και

$$\begin{aligned} P(2 < X \leq 3) &= P(X \leq 3) - P(X \leq 2) = 26/32 - 16/32 \\ &= 10/32 = f(3) = P(X = 3). \end{aligned}$$

Ισχύει γενικά η προφανής σχέση

$$\mathbf{f(x_\kappa) = F(x_\kappa) - F(x_{\kappa-1})}, \; \kappa = \mathbf{2, 3}, \ldots . \tag{2.4}$$

7. Έστω η τυχαία μεταβλητή X με $R_X = \{1, \ldots, \nu\}$. Υποθέτουμε ότι

$$f(x) = cx, \; x = 1, \ldots, \nu, \; \text{όπου } c \text{ σταθερά}$$

Ποιά είναι σταθερά c; Ποιά είναι η πιθανότητα $P(X \leq \kappa), \; \kappa < \nu$;
Από τη σχέση (3) έχουμε

$$\sum_{x=1}^{\nu} cx = 1,$$

η οποία μας δίνει

$$\sum_{x=1}^{\nu} cx = c\sum_{x=1}^{\nu} x = c\frac{\nu(\nu+1)}{2} = 1 \quad ή \quad c = \frac{2}{\nu(\nu+1)}.$$

Επομένως η συνάρτηση πιθανότητας έχει τη μορφή

$$f(x) = \frac{2}{\nu(\nu+1)}x, \quad x = 1, \ldots, \nu.$$

και

$$P(X \leq \kappa) = \sum_{x=1}^{\kappa} x\frac{2}{\nu(\nu+1)} = \frac{2}{\nu(\nu+1)}\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}.$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι η πλήρης μορφή της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής είναι

$$\begin{aligned} F(x) &= 0, \forall\, x \leq 0 \\ F(x) &= P(X \leq x) = \frac{2}{\nu(\nu+1)} \times \frac{[x]([x]+1)}{2}, \; x < \nu \\ F(x) &= P(X \leq x) = 1, \forall\, x \geq \nu. \end{aligned}$$

όπου [x] είναι το ακέραιο μέρος του x.

Συνήθεις Διακριτές Κατανομές

Σε πολλά θεωρητικά και πρακτικά προβλήματα συγκεκριμένες κατανομές εμφανίζονται πολύ συχνά και για το λόγο αυτό αξίζει να τις αναλύσουμε ιδιαίτερα.

Τυχαία Μεταβλητή Bernoulli και Διωνυμική Κατανομή

Η τυχαία μεταβλητή X που παίρνει τις τιμές $\{0, 1\}$ με αντίστοιχες πιθανότητες

$$P(X=0) = q \text{ και } P(X=1) = p, \quad \text{όπου} \quad p+q=1$$

καλείται δίτιμη τυχαία μεταβλητή Bernoulli ή απλά Bernoulli. Η κατανομή αυτή προέρχεται από ένα απλό πείραμα ή δοκιμή Bernoulli, στο οποίο μας ενδιαφέρει αν συμβαίνει ή όχι κάτι συγκεκριμένο. Για παράδειγμα, έστω ένα πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο $\Omega = \{A, A'\}$. Αν συμβεί το ενδεχόμενο A, τότε θεωρούμε ότι έχουμε επιτυχία, αν όχι τότε έχουμε αποτυχία. Οι αντίστοιχες πιθανότητες είναι $P(A) = p, \quad P(A') = q, \quad p + q = 1$.

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της δίνεται από τη σχέση

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{για} \quad x < 0, \\ q & \text{για} \quad 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{για} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Η γένεση της Διωνυμικής κατανομής προέρχεται από την Bernoulli ως εξής: Θεωρούμε ν ανεξάρτητες δοκιμές (πειράματα) Bernoulli, όπως αυτή που περιγράψαμε προηγούμενα. Έστω Y ο αριθμός των επιτυχιών στις ν δοκιμές. Η τυχαία μεταβλητή Y μπορεί να πάρει τις τιμές $\{0, 1, 2, \ldots, \nu\}$.

Ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση πιθανότητάς της, δηλ. την $P(Y = \kappa)$. Για το ενδεχόμενο $B = \{Y = \kappa\}$ είναι ευνοικές όλες οι ν-άδες που αποτελούνται από κ μονάδες και ν-κ μηδενικά. Μία τέτοια είναι για παράδειγμα η

$$(\underbrace{11\ldots11}_{\kappa}\underbrace{00\ldots00}_{\nu-\kappa})$$

και αυτή η ν-άδα λόγω των ανεξαρτήτων δοκιμών έχει πιθανότητα

$$\underbrace{pp\ldots pp}_{\kappa}\underbrace{qq\ldots qq}_{\nu-\kappa} = p^\kappa q^{\nu-\kappa}.$$

Το πλήθος αυτών των ευνοϊκών ν-άδων είναι όσοι οι συνδυασμοί των ν στοιχείων ανά κ, άρα έχουμε γενικά

$$f(y_\kappa) = P(Y = \kappa) = \begin{cases} \binom{\nu}{\kappa} p^\kappa q^{\nu-\kappa} & \text{για } 0 \leq \kappa \leq \nu, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Η Διωνυμική κατανομή (Binomial distribution) είναι μία από τις πιο σημαντικές κατανομές στη θεωρία Πιθανοτήτων. Συνήθως γράφουμε για μία τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί τη Διωνυμική $X \sim b(\kappa; \nu, p)$. Το γράμμα "b" προέρχεται από το Binomial Theorem (Διωνυμικό Θεώρημα), το οποίο μας εξασφαλίζει ότι το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων είναι 1, όπως φαίνεται στη συνέχεια.

Είναι

$$\sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{\nu}{\kappa} p^\kappa q^{\nu-\kappa} = [p+q]^\nu = 1.$$

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της δίνεται από τη σχέση

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{για } x < 0, \\ \sum_{\kappa=0}^{[x]} \binom{\nu}{x} p^x q^{\nu-x} & \text{για } 0 \leq x < \nu, \\ 1 \quad \text{για } x \geq \nu \end{cases}$$

Η Διωνυμική κατανομή είναι εφαρμόσιμη σε πεπερασμένες ακολουθίες δοκιμών (πειραμάτων) στις οποίες ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες:

1) Σε κάθε δοκιμή ενδιαφερόμαστε για το ίδιο ενδεχόμενο, το οποίο θεωρούμε επιτυχία, ενώ το συμπληρωματικό του είναι η αποτυχία.

2) Η πιθανότητα του ενδεχομένου "επιτυχία" σε κάθε δοκιμή είναι σταθερή, έστω p, ενώ του ενδεχομένου "αποτυχία" είναι $q = 1 - p$.

3) Οι δοκιμές (τα πειράματα) είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Ο Ελβετός μαθηματικός Jacques Bernoulli (1654-1705) όρισε και μελέτησε τις παραπάνω κατανομές για το λόγο αυτό η βασική κατανομή έχει το όνομά του.

Παραδείγματα

8. Ένα αμερόληπτο ζάρι ρίχνεται 4 φορές. Ποιά είναι η πιθανότητα των ενδεχομένων
α)A="το 6 εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά"
β)B="το 6 εμφανίζεται ακριβώς μία φορά"
γ)Γ="το 6 εμφανίζεται τουλάχιστον 2 φορές"

Το πρόβλημα αυτό θα μπορούσαμε να το λύσουμε καταγράφοντας τον δειγματικό χώρο και προσδιορίζοντας τα ευνοικά για τα ενδεχόμενα στοιχεία. Η διαδικασία αυτή είναι αρκετά επίπονη και επιρρεπής στο να γίνει κάποιο λάθος στην καταμέτριση. Έτσι, ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X που μετράει τις εμφανίσεις του 6 στις 4 ρίψεις του ζαριού και παρατηρούμε ότι ισχύουν οι προυποθέσεις 1), 2) και 3) που αναφέραμε προηγούμενα. Πράγματι: 1) σε κάθε δοκιμή (ρίψη) ενδιαφερόμαστε για την εμφάνιση του 6, το οποίο αποτελεί την "επιτυχία". 2) η πιθανότητα εμφάνισης του 6 είναι 1/6 για κάθε δοκιμή και 3) οι δοκιμές(ρίψεις) είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Συνεπώς η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή με $R_X = \{0, 1, \ldots, 6\}$ και συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x_\kappa) = P(X = \kappa) = \begin{cases} \binom{6}{\kappa}(1/6)^\kappa(1-1/6)^{6-\kappa} \text{ για } 0 \leq \kappa \leq 6, \\ 0 \text{ διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να απαντήσουμε στα ερωτήματα μας.
α)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{6}{0}(1/6)^0(1-1/6)^{6-0} = 1 - (5/6)^6.$$

β)

$$P(X = 1) = \binom{6}{1}(1/6)^1(1-1/6)^{6-1} = 6 \times (1/6) \times (5/6)^5 = (5/6)^5.$$

γ)

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - \binom{6}{0}(1/6)^0(1-1/6)^{6-0} \\ &= 1 - (5/6)^6 - \binom{6}{1}(1/6)^1(1-1/6)^{6-1} = 1 - (5/6)^6 - (5/6)^5 \end{aligned}$$

ή διαφορετικά

$$P(X \geq 2) = \sum_{\kappa=2}^{6} \binom{6}{\kappa}(1/6)^{\kappa}(5/6)^{6-\kappa}.$$

9. Έστω ένα μη αμερόληπτο νόμισμα για το οποίο γνωρίζουμε ότι $P(K) = 3/5$ και $P(\Gamma) = 2/5$. Το νόμισμα ρίχνεται 10 φορές και έστω η τυχαία μεταβλητή X που μετράει τις εμφανίσεις του ενδεχομένου "K". Θα υπολογί-
σουμε τις πιθανότητες α) $P(X < 2)$, β) $P(X \leq 3 \mid X \geq 1)$.

Για το α) έχουμε

$$\begin{aligned} P(X < 2) &= P(X=0) + P(X=1) \\ &= \binom{10}{0}(3/5)^0(1-3/5)^{10-0} + \binom{10}{1}(3/5)^1(1-3/5)^{10-1} \\ &= (2/5)^{10} + 10(3/5)(2/5)^9. \end{aligned}$$

Το β) ερώτημα αφορά μία δεσμευμένη πιθανότητα και σύμφωνα με τον ορισμό της έχουμε

$$\begin{aligned} P(X \leq 3 \mid X \geq 1) &= \frac{P(X \leq 3 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(1 \leq X \leq 3)}{P(X \geq 1)} \\ &= \frac{P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)}{1 - P(X=0)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\binom{10}{1}(3/5)^1(2/5)^9 + \binom{10}{2}(3/5)^2(2/5)^8 + \binom{10}{3}(3/5)^3(2/5)^7}{1-(2/5)^{10}}$$

Παρατηρήσεις:1. Επισημαίνουμε ότι στο τελευταίο παράδειγμα δεν θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, αφού τα στοιχειώδη ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα αφού το νόμισμα δεν είναι αμερόληπτο.

2. Για την Διωνυμική κατανομή υπάρχουν πίνακες που μας δίνουν τις πιθανότητες ή την αθροιστική κατανομή της ανάλογα με τις παραμέτρους της, δηλ. τον αριθμό των δοκιμών ή πειραμάτων και τη πιθανότητα του ενδεχομένου "επιτυχία". Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε πιθανότητες όπως η β) του παραδείγματος άμεσα. Παραπέμπουμε στον Πίνακα III του Παραρτήματος.

Γεωμετρική Κατανομή

Έστω μία ακολουθία ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli η οποία τερματίζεται όταν εμφανισθεί για πρώτη φορά το ενδεχόμενο "επιτυχία". Έστω Χ ο αριθμός των απαιτουμένων δοκιμών. Η Χ είναι τυχαία μεταβλητή με πεδίο τιμών $R_X = \{1, 2, \ldots, \nu, \nu + 1, \ldots, \}$. Η συνάρτηση πιθανότητας είναι

$$f(x_\kappa) = P(X = \kappa) = P(\underbrace{A, \ldots, A}_{\kappa-1} E) = q^{\kappa-1}p,\ \kappa = 1, 2, \ldots,$$

όπου "Ε" συμβολίζει το ενδεχόμενο "επιτυχία" και "Α" το ενδεχόμενο " αποτυχία".

Αθροίζοντας για όλα τα κ και χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική σειρά έχουμε

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} q^{\kappa-1}p = p\frac{1}{1-q} = 1.$$

Μια τυχαία μεταβλητή Χ, που ορίζεται όπως η παραπάνω, ακολουθεί τη Γεωμετρική κατανομή (Geometric distribution).

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Γεωμετρικής είναι

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \quad \forall x \leq 0 \\ F(x) &= \sum_{\kappa=1}^{[x]} q^{\kappa-1}p = p\frac{1-q^{[x]}}{1-q} = 1 - q^{[x]}, \quad \forall x \geq 1. \end{aligned}$$

Σε πολλές εφαρμογές εμφανίζεται η **τροποποιημένη Γεωμετρική κατανομή** η οποία ορίζεται ως εξής: Έστω η ακολουθία των ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli και έστω Ζ η τυχαία μεταβλητή που μετράει τον αριθμό των αποτυχιών μέχρι την πρώτη εμφάνιση του ενδεχομένου "επιτυχία". Τότε η συνάρτηση πιθανότητας της Z έχει τη μορφή

$$f(z_\kappa) = P(Z = \kappa) = q^k p, \quad \kappa = 0, 1, 2, \ldots, .$$

Γενίκευση της Γεωμετρικής αποτελεί η **κατανομή Pascal** για την οποία δίνουμε μόνο τον ορισμό της: Έστω μία ακολουθία ανεξαρτήτων δοκιμών και έστω Y η τυχαία μεταβλητή που μετράει τον απαιτούμενο αριθμό δοκιμών έως ότου εμφανισθεί το ενδεχόμενο "επιτυχία" ν φορές. Τότε η συνάρτηση πιθανότητας της Y είναι

$$f(y_\kappa) = P(Y = \kappa) = \binom{\kappa - 1}{\nu - 1} p^{\nu-1} q^{\kappa-\nu} p = \binom{\kappa - 1}{\nu - 1} p^\nu q^{\kappa-\nu}$$

για $\kappa = \nu,\ \nu + 1,\ \ldots,$.

Υπεργεωμετρική Κατανομή

Ας θεωρήσουμε μία κάλπη που περιέχει α άσπρες σφαίρες και π πράσινες σφαίρες. Εξάγονται κ σφαίρες μία-μία **χωρίς επανάθεση** και έστω X ο αριθμός των πράσινων σφαιρών. Η X είναι τυχαία μετβλητή με συνάρτηση πιθανότητας

$$P(X = x) = \frac{\binom{\pi}{x}\binom{\alpha}{\kappa - x}}{\binom{\alpha + \pi}{\kappa}}.$$

Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την Υπεργεωμετρική κατανομή (Hypergeometric distribution) με πεδίο τιμών

$$\max\{0, \kappa - \alpha\} \leq X \leq \min\{\kappa, \pi\}.$$

Παρατηρούμε ότι αν οι εξαγωγές γίνονταν με επανάθεση, τότε θα είχαμε Διωνυμική κατανομή, αφού σε κάθε εξαγωγή η πιθανότητα να εξαχθεί πράσινη σφαίρα θα παρέμενε $\pi/\alpha + \pi$ και τα πειράματα (εξαγωγές) ανεξάρτητα. Δηλ. η διαφορά της Υπεργεωμετρικής από τη Διωνυμική είναι ότι με το "χωρίς επανάθεση" χάνεται η ανεξαρτησία των δοκιμών (ή πειραμάτων ή εξαγωγών).

10. Ας θεωρήσουμε διαδοχικές ρίψεις ενός αμερόληπτου ζαριού η οποία τερματίζεται όταν εμφανισθεί αριθμός που διαιρείται με τον αριθμό

3. Ποιά είναι η πιθανότητα να απαιτηθούν τουλάχιστον 2 ρίψεις;
Έστω X ο αριθμός των απαιτούμενων ρίψεων έως ότου εμφανισθεί το ενδεχόμενο "αριθμός που διαιρείται με το 3", το οποίο αποτελεί την "επιτυχία". Άρα σε κάθε ρίψη ενδιαφερόμαστε για την εμφάνιση ή όχι του ενδεχομένου αυτού, του οποίου η πιθανότητα είναι $P(E) = 2/6$ και παραμένει σταθερή σε κάθε ρίψη που είναι ανεξάρτητη από τις άλλες. Άρα έχουμε ακολουθία ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli και η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την Γεωμετρική κατανομή, δηλ. έχουμε

$$P(X = \kappa) = (4/6)^{\kappa-1}(2/6),\ \kappa = 1, 2, \ldots,$$

και η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - (2/6) - (4/6)(2/6) = 4/9,$$

ή

$$P(X \geq 3) = \sum_{\kappa=3}^{\infty}(4/6)^{\kappa-1}(2/6) = 4/9.$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(X \leq 5|X > 2)$. Είναι

$$\begin{aligned} P(X > 5|X > 2) &= 1 - P(X \leq 5|X > 2) = 1 - \frac{P(2 < X \leq 5)}{P(X > 2)} \\ &= 1 - \frac{P(X = 3 \text{ ή } 4 \text{ ή } 5)}{P(X \geq 3)} \\ &= 1 - \frac{(4/6)^2 2/6 + (4/6)^3 2/6 + (4/6)^4 2/6}{4/9} = 0,4815. \end{aligned}$$

Ας υπολογίσουμε τώρα την πιθανότητα $P(X > 3)$. Είναι

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= 1 - P(X \leq 3) = 1 - P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= 1 - 2/6 + (4/6)2/6 + (4/6)^2 2/6 = 0,4815. \end{aligned}$$

Παρατηρώντας τις δύο τελευταίες πιθανότητες συμπεραίνουμε ότι

$$P(X > 5|X > 2) = P(X > 2 + 3|X > 2) = P(X > 3).$$

Το αποτέλεσμα αυτό δεν είναι τυχαίο. Για τη Γεωμετρική κατανομή ισχύει γενικά η σχέση

$$P(X > \kappa + \nu|X > \kappa) = P(X > \nu), \quad \kappa, \nu = 0, 1, \ \ldots$$

η οποία καλείται **αμνήμων** ιδιότητα. Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ σημαντική για τις εφαρμογές στις οποίες εμφανίζονται τέτοιου είδους συμπεριφορές, π.χ. στο χρόνο ζωής συσκευών που ελέγχονται κατά χρονικά διαστήματα. Όπως θα δούμε αργότερα στις συνεχείς κατανομές, την ιδιότητα αυτή την έχει και η εκθετική κατανομή. Η αμνήμων ιδιότητα χαρακτηρίζει αυτές τις δύο κατανομές, με την έννοια ότι καμμιά άλλη κατανομή παρουσιάζει αυτή την ιδιότητα.

Στο ίδιο παράδειγμα, έστω ότι ενδιαφερόμαστε για το εξής ενδεχόμενο:"ο αριθμός των αποτυχιών μέχρι την επιτυχία είναι 5". Τότε έχουμε την τροποποιημένη Γεωμετρική κατανομή και ζητάμε την πιθανότητα $P(Z = 5)$, η οποία είναι

$$P(Z = 5) = (4/6)^5(2/6)$$

Συνεχίζοντας το ίδιο παράδειγμα, έστω ότι ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου " απαιτούνται 10 ρίψεις έως ότου εμφανισθεί αριθμός που διαιρείται με το 3 δύο φορές". Στην περίπτωση αυτή έχουμε κατανομή Pascal και ζητάμε την πιθανότητα $P(Y = 10)$, που είναι

$$P(Y = 10) = \binom{9}{1}(2/6)(4/6)^8(2/6) = \binom{9}{1}(2/6)^2(4/6)^8.$$

11. Από μία τράπουλα 52 χαρτιών εξάγονται χωρίς επανάθεση 13 χαρτιά. Ποιά είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου "στα 13 χαρτιά υπάρχουν 10 χαρτιά κόκκινα (καρώ ή κούπες) και 3 μαύρα (σπαθιά ή μπαστούνια)";

Έστω η τυχαία μεταβλητή X που μετράει τον αριθμό των κόκκινων χαρτιών στα 13 που πήραμε. Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την Υπεργεωμετρική κατανομή.Η πιθανότητα που ζητάμε είναι

$$P(X = 10) = \frac{\binom{26}{10}\binom{26}{3}}{\binom{52}{13}}.$$

Στο ίδιο παράδειγμα έστω ότι ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου A="στα 13 χαρτιά υπάρχουν 4 καρώ, 5 κούπες, 2 σπαθιά και 2 μπαστούνια".

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα αυτή μπορούμε να εφαρμόσουμε τον ορισμό της κλασικής πιθανότητας θεωρώντας ότι όλες οι 13-αδες είναι το ίδιο πιθανές.Άρα ο δειγματικός μας χώρος αποτελείται από $\binom{52}{13}$ στοιχεία, ενώ οι ευνοικές είναι $\binom{13}{4}\times\binom{13}{5}\times\binom{13}{2}\times\binom{13}{2}$. Συνεπώς

$$P(A) = \frac{\binom{13}{45}\times\binom{13}{5}\times\binom{13}{2}\times\binom{13}{2}}{\binom{52}{13}}.$$

Ας θεωρήσουμε το ενδεχόμενο B=“στα 13 χαρτιά υπάρχουν 2 άσσοι και 2 βαλέδες”. Τότε η πιθανότητα του B είναι

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2}\times\binom{4}{2}\times\binom{44}{9}}{\binom{52}{13}}.$$

αφού υπάρχουν συνολικά 4 άσσοι από τους οποίους θα πάρουμε τους 2, 4 βαλέδες από τους οποίους θα πάρουμε τους 2 και τα υπόλοιπα 9 χαρτιά θα τα πάρουμε από τα 44 χαρτιά της τράπουλας που δεν θα περιέχουν άσσους και βαλέδες. Σημειώνουμε ότι εφαρμόζεται η πολλα πλασιαστική αρχή.

12.Μία εταιρεία που κατασκευάζει δισκέτες για υπολογιστές γνωρίζει από τα στατιστικά της στοιχεία ότι μία στις 100 παρουσιάζει κάποιο ελάττωμα. Οι δισκέτες που προμηθεύεται ένα ηλεκτρονικό κέντρο από την εταιρεία συσκευάζονται ανά 100 και έχει συμφωνηθεί να γίνεται ο εξής έλεγχος: Εξάγονται τυχαία χωρίς επανάθεση 10 δισκέτες από την παρτίδα των 100 και αν βρεθεί μία ελαττωματική, τότε η εταιρεία την αντικαθιστά με μία καλή.α) Ποιά είναι η πιθανότητα σε μία τέτοια παρτίδα δισκετών να μη βρεθεί ελαττωματική; β) Αν το ηλεκτρονικό κέντρο έχει να ελέγξει δύο παρτίδες δισκετών ποιά είναι η πιθανότητα να μη χρειαστεί αντικατάσταση δισκέτας;

Έστω X ο αριθμός των ελατωμματικών δισκετών στις 10 που ελέγχονται.Η X είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την Υπεργεωμετρική κατανομή.Έτσι, για το α) ερώτημα έχουμε

$$p \equiv P(X=0) = \frac{\binom{1}{0}\binom{99}{10}}{\binom{100}{10}}.$$

Για το β) ερώτημα παρατηρούμε ότι η σύνθεση κάθε παρτίδας είναι ανεξάρτητη της άλλης και για την κάθε μία η πιθανότητα να υπάρξει αντικατάσταση είναι η πιθανότητα του α), δηλ. η p. Έστω Y ο αριθμός των παρτίδων στις οποίες δεν γίνονται αντικαταστάσεις. Η Y είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους ν=2, και p του α) ερωτήματος. Άρα

$$P(Y=2) = \binom{2}{2} p^2 (1-p)^0$$

Στο παράδειγμά μας υποθέτουμε ότι παίρνουμε μία-μία τις 10 δισκέτες και σε κάθε μία κάνουμε τον έλεγχο και την κρατάμε στην άκρη. Ισοδύναμο είναι να πούμε ότι παίρνουμε τυχαία και τις 10 μαζί και κάνουμε τον έλεγχο σε κάθε μία. Αν όμως πάρουμε μία δισκέτα την ελέγξουμε και την τοποθετήσουμε πάλι στην παρτίδα, τότε η πιθανότητα να βρεθεί ελαττωματική δεν αλλάζει και έχουμε μία Διωνυμική κατανομή. Δηλ. η πιθανότητα του πρώτου ερωτήματος θα είναι

$$P(X=0) = \binom{10}{0} (1/100)^0 (99/100)^{10}.$$

Κατανομή Poisson

Ας θεωρήσουμε ένα πρόβλημα που συνδέεται με τη Διωνυμική κατανομή. Έστω ότι παρατηρούμε τους πελάτες που φθάνουν σε ένα κέντρο εξυπηρέτησης (π.χ. τράπεζα, πολυκατάστημα, κ.λ.π.) σε ένα χρονικό διάστημα $(0, t]$. Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι για κάθε μικρό χρονικό διάστημα Δt η πιθανότητα άφιξης ενός νέου πελάτη είναι $\lambda\Delta t$, όπου λ είναι μία σταθερά που εξαρτάται από το πλήθος των πελατών που χρησιμοποιούν το κέντρο γενικά. Αν το Δt είναι πολύ μικρό, τότε η πιθανότητα άφιξης περισσοτέρων του ενός πελατών είναι αμελητέα. Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα άφιξης κ πελατών στο χρονικό διάστημα $(0, t]$.

Υποθέτουμε ότι το διάστημα $(0, t]$ διαιρείται σε ν υποδιαστήματα μήκους t/ν, και ότι μία άφιξη σε ένα από αυτά τα διαστήματα είναι ανεξάρτητη μιας άλλης άφιξης σε οποιοδήποτε άλλο διάστημα. Τότε, σύμφωνα με όλες τις παραπάνω υποθέσεις μας και για αρκετά μεγάλο ν, μπορούμε τα ν διαστήματα να τα θεωρήσουμε ώς δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $\lambda t/\nu$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι κατά προσέγγιση

$$b(k;\nu,\lambda t/\nu) \approx \binom{\nu}{\kappa}(\frac{\lambda t}{\nu})^{\kappa}(1-\frac{\lambda t}{\nu})^{\nu-\kappa}, \quad \kappa=0,1,\dots,\nu.$$

Αφού όλα τα παραπάνω ισχύουν αν το χρονικό διάστημα t/ν είναι πολύ μικρό , ας θεωρήσουμε το όριο της πιθανότητας όταν το $\nu \to \infty$. Έχουμε

$$\begin{aligned} b(\kappa;\nu,\lambda t/\nu) &\approx \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\dots(\nu-\kappa+1)}{\kappa!\nu^{\kappa}} \\ &\cdot (\lambda t)^{\kappa}\cdot(1-\frac{\lambda t}{\nu})^{(\nu-\kappa)} \\ &= \{\frac{\nu}{\nu}\cdot\frac{\nu-1}{\nu}\cdot\ldots\cdot\frac{\nu-\kappa+1}{\nu}\}\cdot\{\frac{(\lambda t)^{\kappa}}{\kappa!}\} \\ &\cdot \{(1-\frac{\lambda t}{\nu})^{-\kappa}\}\cdot\{(1-\frac{\lambda t}{\nu})^{\nu}\}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι όταν το $\nu \to \infty$, τότε το πρώτο $\{\}$ τείνει στο 1, το δεύτερο $\{\}$ παραμένει ως έχει, αφού είναι ανεξάρτητο του ν, το τρίτο $\{\}$ τείνει στο 1 και για το τέταρτο $\{\}$ γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{\nu\to\infty}(1-\frac{\lambda t}{\nu})^{\nu} = e^{-\lambda t}.$$

Σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα:

$$\lim_{\nu\to\infty} b(k;\nu,\lambda t/\nu) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\kappa}}{\kappa!}$$

Θέτοντας $\lambda t = \nu p = \theta$, έχουμε τον πρώτο ορισμό της κατανομής Poisson που προέρχεται από την προσέγγιση της Διωνυμικής κατανομής.

Ορισμός 2.5. *Η τυχαία μεταβλητή X με πεδίο τιμών $\{0,1,2,\dots,\}$ και συνάρτηση πιθανότητας*

$$f(x) = P(X=x) = e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!}, x=0,1,\dots$$

ακολουθεί την κατανομή Poisson.

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της εκθετικής συνάρτησης έχουμε

$$\sum_{x=0}^{\infty} e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!} = e^{-\theta}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\theta^x}{x!} = e^{-\theta}e^{\theta} = 1,$$

που ισχύει για κάθε συνάρτηση πιθανότητας.

Παρατήρηση 1.Έχει παρατηρηθεί ότι η προσέγγιση είναι αρκετά ικανοποιητική αν $\nu \geq 20$ και $p \leq 0,05$. Όπως για τη Διωνυμική κατανομή, υπάρχουν πίνακες που μας δίνουν τιμές της κατανομής Poisson, από τους οποίους μπορούμε και να συγκρίνουμε την πραγματική τιμή με την προσέγγιση της. Παραπέμπουμε στον Πίνακα IV του Παραρτήματος.

Η κατανομή ορίστηκε από τον S. D. Poisson σε ένα βιβλίο που δημοσίευσε το 1837, στο οποίο ανέπτυξε εφαρμογές της θεωρίας πιθανοτήτων σε θέματα που αφορούσαν στοιχεία δικαστικών υποθέσεων.

Θεωρώντας τις συνθήκες που αναφέραμε στην αρχή και τις οποίες διατυπώνουμε ως εξής:
1) Σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα το πολύ ένα γεγονός (άφιξη ή οτιδήποτε άλλο, όπως μία τηλεφωνική κλίση, ένα ατύχημα, εκπομπή ενός σωματιδίου από συγκεκριμένη πηγή κ.λ.π.) μπορεί να συμβεί,
2) Σε ξένα μεταξύ τους χρονικά διαστήματα τα ενδεχόμενα που μπορούν να συμβούν είναι ανεξάρτητα και
3) Η πιθανότητα να συμβούν κ γεγονότα σε ένα χρονικό διάστημα εξαρτάται από το μέγεθος του διαστήματος και όχι πότε συνέβη,
έχουμε τη **Στοχαστική Ανέλιξη Poisson** (Poisson Stochastic Process) που ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 2.6. *Έστω $X(t)$ ο αριθμός γεγονότων που συμβαίνουν στο χρονικό διάστημα $(0,t]$. Αν ικανοποιούνται οι συνθήκες 1-3, τότε*

$$P(X(t) = \kappa) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\kappa}}{\kappa!}, \kappa = 0, 1, \ldots,$$

όπου λ είναι ο αναμενόμενος αριθμός γεγονότων που συμβαίνουν στη μονάδα του χρόνου.

Παρατήρηση 2. Με τον όρο Στοχαστική Ανέλιξη εννούμε οικογένεια τυχαίων μεταβλητών. Αυτό ισχύει στην προκειμένη περίπτωση, αφού αλλάζοντας το χρονικό διάστημα έχουμε μία νέα τυχαία μεταβλητή. Στην πραγματικότητα έχουμε την ακολουθία $\{X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_\nu)\}, \nu = 1, 2, \ldots$. Η Στοχαστική Ανέλιξη Poisson είναι από τα ιδιαίτερα χρήσιμα μοντέλα πιθανοτήτων, γιατί μεγάλος αριθμός φαινομένων μπορούν να περιγραφούν και να μελετηθούν με βάση αυτό. Στα παραδείγματα που ακολουθούν προσπαθούμε να δείξουμε τη διαφορά μεταξύ των δύο ορισμών, καθώς και την ποικιλία εφαρμογών.

13. Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει chips από τα οποία το 1% είναι ελαττωματικά. Επιλέγονται 100 chips τυχαία και ελέγχονται ένα-ένα. Έστω X ο αριθμός των ελαττωματικών chips. Η X είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή (γιατί;). Η πιθανότητα του ενδεχομένου "στα 100 chips να μη βρεθεί ελαττωματικό" χρησιμοποιώντας τη Διωνυμική, που είναι η ακριβής κατανομή, είναι

$$P(X=0) = b(0; 100, 0,01) = \binom{100}{0}(0,01)^0(0,99)^{100} = 0,366.$$

Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση με την Poisson έχουμε $\theta = 100 \cdot 0,01 = 1$ και άρα

$$f_X(0) = P(X=0) = e^{-1}\frac{1^0}{0!} = 0,3679.$$

Ας δούμε όμως πως μας διευκολύνει η Poisson. Έστω ότι ζητάμε την πιθανότητα στα 1000 chips που ελέγχονται να βρεθούν 15 ελαττωματικά. Τότε από τη Διωνυμική έχουμε

$$\begin{aligned} P(X=15) = b(15; 1000,\ 0,01) &= \binom{1000}{15}(0,01)^{15}(0,99)^{1000-15} \\ &= \frac{1000!}{15!(1000-15)!}(0,01)^{15}(0,99)^{1000-15}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την Poisson έχουμε την πιθανότητα

$$P(X=15) = e^{-1}\frac{1^{15}}{15!},$$

η οποία υπολογίζεται ευκολότερα από αυτή της Διωνυμικής.

14. Είναι γνωστό ότι το ποσοστό των αριστερόχειρων φοιτητών του Πανεπι στημίου Αθηνών είναι 0, 2%, ενώ των φοιτητριών 0, 1%. Ελέγχονται τυχαία 5000 φοιτητές και 3000 φοιτήτριες ως προς αυτό το χαρακτηριστικό . Ποιά είναι η πιθανότητα να βρεθούν το πολύ 6 φοιτητές και το πολύ 3 φοιτήτριες αριστερόχειρες;

Έστω X ο αριθμός των αριστερόχειρων φοιτητών. Η X ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή με $\nu = 5000$ και $p = 0,002$. Επειδή το ν είναι αρκετά μεγάλο και το p αρκετά μικρό, έτσι ώστε $\nu p = 10$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την κατανομή Poisson με $\lambda = 5000 \times 0,002 = 10$ και να υπολογίσουμε την πιθανότητα στους 5000 φοιτητές να βρεθούν το πολύ 6 αριστερόχειρες, που είναι

$$P(X \leq 6) = \sum_{x=0}^{6} e^{-10} \frac{10^x}{x!}.$$

Έστω τώρα Y ο αριθμός των αριστερόχειρων φοιτητριών. Κανονικά η Y είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή με $\nu = 3000$ και $p = 0,001$. Για τους ίδιους λόγους, όπως προηγούμενα η Y προσεγγίζεται από την Poisson με $\lambda = 3000 \times 0,001 = 3$ και άρα

$$P(Y \leq 3) = \sum_{x=0}^{3} e^{-3} \frac{3^x}{x!}.$$

Συνεπώς η πιθανότητα που ζητάμε είναι

$$(P(X \leq 6)) \cdot (P(Y \leq 3)),$$

αφού τα ενδεχόμενα “το πολύ 6 φοιτητές είναι αριστερόχειρες” και “το πολύ 3 φοιτήτριες είναι αριστερόχειρες” είναι ανεξάρτητα.

15.Έστω ότι ένα βιβλίο 300 σελίδων έχει 60 τυπογραφικά λάθη, τα οποία είναι κατανεμημένα τυχαία σε όλες τις σελίδες του. α)Ποιά είναι η πιθανότητα μία σελίδα που εκλέγεται στην τύχη να περιέχει τουλάχιστον ένα τυπογραφικό λάθος; β) Ποιά είναι η πιθανότητα σε 20 σελίδες που εκλέγονται τυχαία τουλάχιστον μία να περιέχει τουλάχιστον ένα τυπογραφικό λάθος; γ) Αρχίζουμε να ελέγχουμε το βιβλίο από την πρώτη σελίδα και σταματάμε όταν βρεθεί η πρώτη σελίδα με τουλάχιστον ένα τυπογραφικό λάθος. Ποιά είναι η πιθανότητα να σταματήσουμε στην 57 σελίδα;

α)Σε κάθε σελίδα υπάρχουν κατά μέσο όρο $60/300 = 0{,}2$ λάθη. Έστω X ο αριθμός των λαθών μιας σελίδας. Η X είναι τυχαία μεταβλητή που προσεγγίζεται από την Poisson και η πιθανότητα που ζητάμε είναι

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-0{,}2} = p.$$

β)Έστω Y ο αριθμός των σελίδων,από τις 20, που έχουν τουλάχιστον ένα λάθος. Η Y ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $\nu = 20$ και $p = 1 - e^{-0{,}2}$ του προηγούμενου ερωτήματος. Άρα

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{20}{0} p^0 (1-p)^{20}.$$

γ) Έστω Z ο αριθμός των σελίδων που ελέγχονται έως ότου βρεθεί μία με τουλάχιστον ένα λάθος. Η Z είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί τη Γεωμετρική κατανομή και άρα

$$P(Z = 57) = (1-p)^{56} p, \ p = 1 - e^{-0{,}2}.$$

16. Σε ένα μεγάλο ηλεκτρονικό κέντρο φθάνουν εργασίες προς διεκπεραίωση με ρυθμό λ=3 εργασίες/ 1 λεπτό. Ποιές είναι οι πιθανότητες των ακόλουθων ενδεχομένων:
A="Σε ένα λεπτό έχουν φθάσει το πολύ 2 εργασίες"
B="Σε 10 λεπτά έχουν φθάσει περισσότερες από 10 εργασίες"
Γ="Σε 6 χρονικά διαστήματα των 5 λεπτών, τα οποία είναι ξένα μεταξύ τους, να βρεθεί τουλάχιστον ένα στο οποίο έχουν φθάσει ακριβώς 15 εργασίες".

Στο παράδειγμα αυτό χρησιμοποιούμε τον Ορισμό 2, δηλ. τη στοχαστική ανέλιξη Poisson.

Έστω η τυχαία μεταβλητή X(1) που μετράει πόσες εργασίες φθάνουν σε ένα λεπτό. Η X(1) ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ=3 εργασίες/ 1 λεπτό. Άρα για το ενδεχόμενο A έχουμε

$$P(A) = P(X(1) \leq 2) = e^{-3} \ + \ e^{-3}\frac{3}{1!} \ + \ e^{-3}\frac{3^2}{2!} = \frac{17}{2}\ e^{-3}.$$

Έστω X(10) η τυχαία μεταβλητή που μετράει πόσες εργασίες φθάνουν σε δέκα λεπτά. Τότε

$$P(B) = P(X(10) \geq 11) = \sum_{x=11}^{\infty} e^{-3 \cdot 10} \frac{(3 \cdot 10)^x}{x!}$$

Τέλος, έστω Y ο αριθμός των διαστημάτων των 5 λεπτών στα οποία έχουν φθάσει ακριβώς 15 εργασίες. Η Y είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους ν=6 και $p = P(X(5) = 15)$. Ας υπολογίσουμε την πιθανότητα επιτυχίας p που είναι

$$p = P(X(5) = 15) = e^{-3\cdot 5}\frac{(3\cdot 5)^{15}}{15!}.$$

Άρα η πιθανότητα του ενδεχομένου Γ είναι

$$P(\Gamma) = P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{6}{0} p^0(1-p)^6.$$

Ποιά είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου Δ="σε 1/2 του λεπτού φθάνουν το πολύ 2 εργασίες";

17.Είναι γνωστό ότι ο αριθμός των σεισμών που συμβαίνουν σε μία περιοχή της Ελλάδας ακολουθεί την κατανομή Poisson με ρυθμό λ=2 σεισμοί/βδομάδα.Ποιά είναι η πιθανότητα των ενδεχομένων
A="σε 2 συνεχόμενες βδομάδες συμβαίνουν τουλάχιστον 2 σεισμοί".
B="σε κάθε μία από 2 συνεχόμενες βδομάδες συμβαίνει τουλάχιστον ένας σεισμός".
Γ="σε τέσσερες βδομάδες ακριβώς 3 είχαν τουλάχιστον ένα σεισμό".

Η μονάδα χρόνου είναι βδομάδα και έστω X(1) η τυχαία μεταβλητή που μετράει τους σεισμούς που συμβαίνουν σε μία βδομάδα. Η X(1) ακολουθεί την Poisson με παράμετρο λ=2 σεισμοί/βδομάδα. Άρα για το ενδεχόμενο A έχουμε

$$\begin{aligned} P(A) = P(X(2) \geq 2) &= 1 - P(X(2) = 0) - P(X(2) = 1) \\ &= 1 - e^{(-2\cdot 2)} - e^{(-2\cdot 2)}\frac{(2\cdot 2)^1}{1!} = 1 - 5e^{-4}. \end{aligned}$$

Το B ενδεχόμενο αφορά κάθε μία από δύο συνεχόμενες βδομάδες που αποτελούν ξένα μεταξύ τους χρονικά διαστήματα, άρα υπάρχει ανεξαρτησία. Ενδιαφερόμαστε για το ενδεχόμενο $\{X(1) \geq 1\}$, το οποίο αφορά μία οποιαδήποτε βδομάδα και η πιθανότητά του είναι

$$P(X(1) \geq 1) = 1 - P(X(1) = 0) = 1 - e^{-2}.$$

Συνεπώς
$$P(B) = (1 - e^{-2})^2,$$
αφού τα ενδεχόμενα που αφορούν την κάθε βδομάδα είναι ανεξάρτητα.

Τέλος, έστω Y η τυχαία μεταβλητή που μετράει τις βδομάδες με τουλάχιστον 1 σεισμό. Η Y ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους ν=4 και πιθανότητα επιτυχίας $p = 1 - e^{-2}$. Άρα,

$$P(\Gamma) = b(3; 4, (1 - e^{-2})) = \binom{4}{3}(1 - e^{-2})^3(e^{-2})^{4-3}.$$

18. Ο αριθμός των αυτοκινιτιστικών δυστυχημάτων στο λεκανοπέδιο της Αττικής ακολουθεί την κατανομή Poisson με ρυθμό λ= 5 δυστυχήματα/ώρα. Ποιά είναι η πιθανότητα των ενδεχομένων
Α="Σε 5 ώρες έχουν συμβεί το πολύ 15 δυστυχήματα".
Β="Από τις 9 π.μ. έως 3 μ.μ όλες οι ώρες είχαν τουλάχιστον ένα δυστύχημα". Είναι γνωστό ότι με πιθανότητα 0,5 κάθε δυστύχημα προκαλεί κάποιο τραυματισμό. Ποιά είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου
Γ="σε 2 συνεχόμενες ώρες υπάρχουν τουλάχιστον 5 τραυματισμοί".

Έστω Χ(1) η τυχαία μεταβλητή που μετράει τα δυστυχήματα σε μία ώρα.Είναι
$$P(X(5) \le 15) = \sum_{x=0}^{15} e^{-5\cdot 5}\frac{(5\cdot 5)^x}{x!}.$$

Η πιθανότητα σε μία ώρα να έχουμε τουλάχιστον ένα ατύχημα είναι

$$P(X(1) \ge 1) = 1 - P(X(1) = 0) = 1 - e^{-5} = p,$$

άρα για το Β ενδεχόμενο έχουμε

$$P(B) = \binom{6}{6}p^6(1 - p)^0.$$

(γιατί;).

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ απαιτείται μία περαιτέρω ανάλυση. Έστω Υ(1) ο αριθμός των δυστυχημάτων που προκαλούν τραυμαστισμούς. Θα προσδιορίσουμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής Υ(1). Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας έχουμε

$$\begin{aligned}
P(Y(1)=x) &= \sum_{n=x}^{\infty} e^{-5}\frac{5^n}{n!}b(x;n,\ 0,5) = \sum_{n=x}^{\infty} e^{-5}\frac{5^n}{n!}\binom{n}{x}0,5^x 0,5^{n-x} \\
&= e^{-5}\frac{(5\cdot 0,5)^x}{x!}\sum_{n=x}^{\infty}\frac{(5\cdot 0,5)^{n-x}}{(n-x)!} = e^{-5}\frac{(5\cdot 0,5)^x}{x!}e^{(5\cdot 0,5)} \\
&= e^{-2,5}\frac{2,5^x}{x!},
\end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι η Y(1) ακολουθεί την κατανομή Poisson με ρυθμό $\lambda = 5\cdot 0,5 = 2,5$ τραυματισμούς/ώρα. Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ που είναι η ακόλουθη

$$P(Y(2)\geq 5) = \sum_{x=5}^{\infty} e^{(-2,5\cdot 2)}\frac{(2,5\cdot 2)^x}{x!}.$$

2.3 Συνεχείς Κατανομές

Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

Ορισμός 2.7. *Μία τυχαία μεταβλητή X καλείται* **συνεχής** *αν η αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(x) = P(X \leq x)$ είναι συνεχής συνάρτηση του x για όλα $-\infty < x < \infty$.*

Οι τυχαίες μεταβλητές με τις οποίες θα ασχοληθούμε θα έχουν απόλυτα συνεχή αθροιστική συνάρτησ κατανομής, έτσι ώστε η $\frac{dF(x)}{dx}$ υπάρχει παντού, εκτός ίσως από πεπερασμένο αριθμό σημείων. Μία τέτοια τυχαία μεταβλητή καλείται απόλυτα συνεχής.

Ορισμός 2.8. *Έστω μία συνεχής τυχαία μεταβλητή. Η $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ καλείται* **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** *(probability density function) της τυχαίας μεταβλητής X.*

Στη συνέχεια για λόγους συντομίας θα γράφουμε **α.σ.κ.** αντί για αθροιστική συνάρτηση κατανομής και **σ.π.π.** αντί για συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Από τους παραπάνω ορισμούς έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad -\infty < x < \infty, \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} P(\alpha < X \leq \beta) &= P(X \leq \beta) - P(X \leq \alpha) \\ &= \int_{\infty}^{\beta} f(x)dx - \int_{\infty}^{\alpha} f(x)dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \end{aligned} \tag{2.6}$$

Η σ.π.π. έχει τις εξής ιδιότητες

$$f(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \tag{2.7}$$

Παρατηρούμε ότι

$$P(X = x) = P(x \leq X \leq x) = \int_{x}^{x} f(t)dt = 0. \tag{2.8}$$

Αυτό δεν σημαίνει ότι το ενδεχόμενο $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ είναι το κενό, αλλά ότι η πιθανότητα που αντιστοιχεί σε αυτό το σύνολο είναι μηδέν. Αυτό έχει ως συνέπεια τη σχέση

$$\begin{aligned} P(\alpha \leq X \leq \beta) &= P(\alpha < X \leq \beta) = P(\alpha \leq X < \beta) \\ &= P\alpha < X < \beta) \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \\ &= F(\beta) - F(\alpha). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Συνήθεις Συνεχείς Κατανομές

Ομοιόμορφη Κατανομή

Η τ.μ. X με πεδίο τιμών το διάστημα $R_X = [\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in R, \quad -\infty < \alpha < \beta < \infty$ και σ.π.π.

$$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}$$

ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή.

Η α.σ.κ. της τ.μ. X είναι

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \,\forall\, x < \alpha, \\ F(x) &= \int_{\alpha}^{x} \frac{1}{\beta-\alpha} dt = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} \quad \forall\, \alpha < x < \beta, \\ F(x) &= 1, \quad \forall\, x \geq \beta. \end{aligned}$$

Στη διεθνή βιβλιογραφία η ομοιόμορφη κατανομή συμβολίζεται με U(α, β) (Uniform distribution in the interval [α, β]).

Εκθετική Κατανομή

Η τ.μ. X με πεδίο τιμών $R_X = [0, -\infty)$ και σ.π.π.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \text{ όπου} \lambda > 0 \text{ σταθερά},$$

ακολουθεί την εκθετική κατανομή (exponential distribution).

Η α.σ.κ. της τ.μ. είναι

$$\begin{aligned} F(x) &= 0, \quad -\infty < x < 0 \\ F(x) &= \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}, \quad 0 \leq x < \infty. \end{aligned}$$

Η εκθετική κατανομή έχει μία σημαντική ιδιότητα που καλείται **"έλλειψη μνήμης ή αμνήμων ιδιότητα "** λόγω του ότι

$$\begin{aligned} P(X \leq x + y \mid X > y) &= \frac{P(y < X \leq x + y)}{P(X > y)} \\ &= \frac{\int_{y}^{x+y} \lambda e^{-\lambda t dt}}{\int_{y}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt} \\ &= 1 - e^{-\lambda x} \\ &= P(0 \leq X \leq x), \quad 0 < y < y + x < \infty, \end{aligned}$$

δηλ. δεδομένου ότι η τ.μ. X υπερβαίνει την τιμή y, η πιθανότητα να μη υπερβαίνει την τιμή $y + x$ ισούται με την πιθανότητα να μη υπερβαίνει την τιμή x ανεξάρτητα της δέσμευσης. Αυτό σημαίνει ότι "ξεχνάει" το παρελθόν. Είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι η Γεωμετρική κατανομή έχει την ιδιότητα αυτή. Πολλές φορές η παραπάνω ιδιότητα αναφέρεται ως ιδιότητα Markov.

Η εκθετική κατανομή χρησιμοποιείται για να εκφράσει το χρόνο ζωής λαμπτήρων, λυχνιών, chips κ.λ.π., στοιχείων διαφόρων απλών ή πολύπλοκων μηχανημάτων, το χρόνο μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων σε κάποια ουρά (σε πολυκατάστημα, σε τράπεζα, σε στάση λεωφορείου, σε οποιαδήποτε υπηρεσία, κ.λ.π.), το χρόνο εξυπηρέτησης πελάτη (σε οποιαδήποτε σύστημα εξυπηρέτησης), το χρόνο επισκευής μηχανήματος, καθώς και σε πολλές άλλες εφαρμογές. Άμεση είναι η σχέση της με την κατανομή Poisson, αφού αν ορίσουμε την τ.μ. T που εκφράζει τον χρόνο μεχρι την πραγματοποίηση του πρώτου γεγονότος, τότε έχουμε για την α.σ.κ. της T

$$F(t) = P(T \leq t) = P(X(t) = 0) = 1 - e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda t} \quad 0 < t < \infty,$$

όπου X(t) ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ, δηλ. X(t) είναι ο αριθμός των γεγονότων που συμβαίνουν στο χρονικό διάστημα [0, t]. Παραγωγίζοντας την α.σ.κ. έχουμε ότι η σ.π.π. της τ.μ. T είναι

$$\frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Άρα η τ.μ. T ακολουθεί την εκθετική κατανομή.

Το ακόλουθο παράδειγμα μας δείχνει πως μπορούν να συνδυασθούν πιθανότητες που αφορούν συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με πιθανότητες διακριτών τυχαίων μεταβλητών.

19. Έστω ότι ο χρόνος ζωής (σε ώρες) μιας λυχνίας που κατασκευάζει ένα εργοστάσιο ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ=1/1000.
α) Μία λυχνία εκλέγεται στην τύχη από το σημείο παραγωγής και ελέγχεται. Ποιά είναι η πιθανότητα να ζήσει ζήσει περισσότερο από 2000 ώρες;
β) Από το σημείο παραγωγής εκλέγονται στην τύχη 15 λυχνίες και ελέγχονται. Ποιά είναι η πιθανότητα περισσότερες από 5 να ζήσουν περισσότερο από 1000 ώρες;
γ) Υποθέτοντας ότι παράγεται ένας μεγάλος αριθμός λυχνιών, το ακόλουθο πείραμα διεξάγεται: Ελέγχουμε μία-μία τις λυχνίες και σταματάμε αν βρεθεί μία που να έχει χρόνο ζωής περισσότερο από 2000 ώρες. Ποιά είναι η πιθανότητα να σταματήσουμε το πείραμα στην 10 δοκιμή (λυχνία);
δ) Έστω ότι η εταιρία που διαχειρίζεται το εργοστάσιο επιθυμεί να δώσει

μία εγγύηση για το χρόνο ζωής μιας λυχνίας. Ποιό χρόνο να δώσει έτσι ώστε να είναι αξιόπιστη με πιθανότητα τουλάχιστον 0,99;

Έστω X ο χρόνος ζωής της λυχνίας. Η X είναι τ.μ. που ακολουθεί την εκθετική κατανομή, άρα η σ.π.π. είναι

$$f(x) = \frac{1}{1000}e^{-\frac{1}{1000}x}, 0 \leq x, \infty.$$

α) Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $\{X > 2000\}$, η οποία είναι

$$P(X > 2000) = \int_{2000}^{\infty} \frac{1}{1000}e^{-\frac{1}{1000}x}dx = e^{-2}.$$

β) Έστω Y ο αριθμός των λυχνιών που έχουν χρόνο ζωής μεγαλύτερο των 1000 ωρών. Η τ.μ. Y ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή (γιατί;) με παραμέτρους ν=15 και $p = P(X > 1000)$, που είναι

$$p = P(X > 1000) = \int_{1000}^{\infty} \frac{1}{1000}e^{-\frac{1}{1000}x}dx = e^{-1}.$$

Ζητάμε την πιθανότητα $P(Y > 5)$, η οποία είναι

$$P(Y > 5) = \sum_{x=6}^{15} \left(\begin{array}{c} 15 \\ x \end{array} \right) (e^{-1})^x (1 - e^{-1})^{15-x}.$$

γ) Έστω Z ο αριθμός των δοκιμών έως ότου βρεθεί μία λυχνία με χρόνο ζωής μεγαλύτερο από 2000 ώρες. Η Z είναι τ.μ. που ακολουθεί τη Γεωμετρική κατανομή (γιατί;) με παράμετρο $p = e^{-2}$ (από το α) ερώτημα). Άρα η πιθανότητα που ζητάμε είναι

$$P(Z = 10) = (1 - e^{-2})^9 (e^{-2}).$$

δ) Έστω τ ο χρόνος εγγύησης. Τότε πρέπει $P(X > \tau) \geq 0,99$ για να είναι αξιόπιστη η εταιρία με πιθανότητα 0,99. Είναι

$$P(X > \tau) = \int_{\tau}^{\infty} \frac{1}{1000}e^{-\frac{1}{1000}x}dx = e^{-\frac{\tau}{1000}} \geq 0,99,$$

η οποία μας δίνει

$$-\frac{\tau}{1000} \geq \ln 0,99 \quad ή \quad \tau < -1000 \ \ln 0,99.$$

Κατανομή Γάμμα

Η συνεχής τυχαία μεταβλητή X με $R_X = [0,\ \infty)$ και σ.π.π.

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\alpha - 1}, \quad \lambda > 0, \quad \alpha > 0,$$

όπου

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx,\ \alpha > 0$$

η Γάμμα συνάρτηση, ακολουθεί την κατανομή Γάμμα.

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες τη Γάμμα συνάρτηση παίρνουμε τη σχέση

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha),$$

η οποία για $\alpha \in \mathbb{N}$ μας δίνει την πολύ χρήσιμη σχέση

$$\Gamma(\alpha + 1) = (\alpha)!$$

Σε πολλές εφαρμογές εμφανίζεται η τιμή της $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Σημειώνουμε ότι το άθροισμα ν ανεξαρτήτων εκθετικών τυχαίων μεταβλητών ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους ν και λ, όπου λ η παράμετρος των εκθετικών τυχαίων μεταβλητών. Επίσης, η κατανομή Γάμμα, καθώς και η επόμενη κατανομή εμφανίζονται στις κατανομές στατιστικών συναρτήσεων που παίζουν σημαντικό ρόλο στη στατιστική συμπερασματολογία, όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια.

Κατανομή Βήτα

Η συνεχής τυχαία μεταβλητή X με $R_X = [0,\ 1]$ και σ.π.π.

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1 - x)^{\beta - 1},$$

όπου $\alpha > 0,\ \beta > 0$ και

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

η συνάρτηση $B(\alpha, \beta)$.

Ιδιαίτερα χρήσιμη είναι η ακόλουθη σχέση που συνδέει τις συναρτήσεις Γάμμα και Βήτα.

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

Κατανομή Weibull

Η τ.μ. Χ που έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} (\frac{\beta}{\alpha})(\frac{x-\upsilon}{\alpha})^{\beta-1} exp\{-(\frac{x-\upsilon}{\alpha})^{\beta}\} & x > \upsilon \\ 0, & x \leq \upsilon, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \upsilon > 0 \end{cases}$$

ακολουθεί την κατανομή Weibull με παραμέτρους α, β, υ. Η κατανομή αυτή έχει αποδειχθεί ότι περιγράφει πολύ ικανοποιητικά το χρόνο ζωής στοιχείων και κυρίως στην περίοδο κόπωσης. Για το λόγο αυτό παίζει σημαντικό ρόλο στη θεωρία Αξιοπιστίας συστημάτων.

Κανονική Κατανομή

Η Κανονική κατανομή θεωρείται η σημαντικότερη κατανομή στη θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστικής κυρίως λόγω του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος που θα αναπτύξουμε στο τέταρτο κεφάλαιο, αλλά και για τις εξαιρετικά ενδιαφέρουσες ιδιότητες της τόσο σε θεωρητική βάση, όσο και στο πεδίο εφαρμογών.

Ο πρώτος που εισήγαγε την Κανονική κατανομή ήταν ο Γάλλος Μαθηματικός Abraham DεE Moivre to 1733 για να προσεγγίσει πιθανότητες που αφορούσαν ενδεχόμενα σχετικά με ακολουθία ρίψεων ενός αμερόληπτου νομίσματος. Στη συνέχεια ο Γερμανός μαθηματικός Karl Friedrich Gauss (1777-1855) χρησιμοποίησε την Κανονική για τις αστρονομικές του μελέτες και έτσι η κατανομή αυτή εκτός από Κανονική ονομάζεται και Γκαουσιανή (Gaussian distribution).

Η συνεχής τ.μ. Χ με πεδίο τιμών $R_X = (-\infty < x < \infty)$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty, \tag{2.10}$$

όπου $-\infty < \mu < \infty$ και $\sigma > 0$ ακολουθεί την **Κανονική κατανομή** (Normal distribution) με παραμέτρους μ και σ. Με exp{} συμβολίζεται η εκθετική συνάρτηση e.

Στη διεθνή βιβλιογραφία συμβολίζεται με $N(\mu, \sigma^2)$.

Η α.σ.κ. της τ.μ. Χ είναι

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dt. \tag{2.11}$$

Επειδή δεν υπάρχει κλειστός τύπος για την α.σ.κ. οι πιθανότητες που αφορούν στην Κανονική κατανομή συνήθως υπολογίζονται αριθμητικά από τις τιμές της α.σ.κ. της Κανονικής για τις τιμές μ=0 και $\sigma^2 = 1$, οι οποίες είναι καταγραμμένες σε πίνακες. Παραπέμπουμε στον Πίνακα V του Παραρτήματος.

Αν μ=0 και $\sigma^2 = 1$, τότε η Κανονική κατανομή καλείται **Τυποποιημένη Κανονική κατανομή** (Standard Normal distribution). Συνήθως η σ.π.π. συμβολίζεται με φ(z),η α.σ.κ. της με Φ(z) και είναι αντίστοιχα

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(z)^2}{2}\right\}, \quad -\infty < z < \infty \tag{2.12}$$

και

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt. \tag{2.13}$$

Γράφουμε $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και $Z \sim N(0, 1)$ Στους πίνακες έχουμε την τιμή της Φ(z) για διάφορες τιμές του z. Οι σ.π.π. f(x) και φ(x) είναι συμμετρικές περί το μ και το μηδέν αντίστοιχα. Οι γραφικές παραστάσεις τους έχουν σχήμα καμπάνας (bell-shaped density). Όσο η τιμή του σ μεγαλώνει τόσο η γραφική παράσταση απλώνεται γύρω από το μ, αυτό φυσικά για την Κανονική κατανομή, αφού στην Τυποποιημένη είναι 1.

Η μετάβαση από την Κανονική στην Τυποποιημένη Κανονική γίνεται ως εξής: Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(\alpha < X \leq \beta)$. Είναι

$$\begin{aligned} P(\alpha < X \leq \beta) &= P(\frac{\alpha-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\beta-\mu}{\sigma}) \\ &= P(\frac{\alpha-\mu}{\sigma} < Z \leq \frac{\beta-\mu}{\sigma}) \\ &= \Phi_Z(\frac{\beta-\mu}{\sigma}) - \Phi_Z(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}), \end{aligned} \tag{2.14}$$

όπου $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ είναι η Τυποποιημένη Κανονική. Η παραπάνω διαδικασία καλείται **τυποποίηση** και θα αναφερόμαστε σε αυτήν στη συνέχεια.

Στους πίνακες υπάρχουν οι τιμές για z θετικά, αφού για αρνητικά z έχουμε την εξής σχέση:

$$\begin{aligned}
\mathit{\Phi}_Z(-z) &= \int_{-\infty}^{-z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{t^2}{2}\} dt \\
&= \int_{z}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{t^2}{2}\} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{t^2}{2}\} dt - \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{t^2}{2}\} dt \\
&= 1 - \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{t^2}{2}\} dt \\
&= 1 - \Phi_Z(z). \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Οι εξής πιθανότητες είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στις εφαρμογές της Κανονικής:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,68$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,95$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,997$$

Στη συνέχεια δίνουμε μερικά υπολογιστικά παραδείγματα για να μπορέσει ο αναγνώστης να εξοικειωθεί με την χρήση του αντίστοιχου πίνακα τιμών της Τυποποιημένης Κανονικής, αλλά και για εισάγουμε κάποιες ιδιότητες της Κανονικής κατανομής.

20. Έστω η τ.μ. $X \sim N(200, 256)$. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες α)$P(X > 200)$, β) $P(X < 216)$ και γ) $P(184 < X < 216 \mid X > 168)$.

Εφαρμόζοντας τη διαδικασία της τυποποίησης έχουμε

α)

$$P(X > 200) = P(\frac{X - 200}{16} > \frac{200 - 200}{16}) = P(Z > 0) = 1 - P(Z \le 0) = 0,5.$$

Για την τιμή αυτή δεν είναι αναγκαίος ο πίνακας, αφού όπως αναφέραμε η τ.μ. Z είναι συμμετρική περί το μηδέν.

β)

$$P(X < 216) = P(X \le 216) = P(\frac{X - 200}{16} \le \frac{216 - 200}{16}) = P(Z \le 1) = 0,8413.$$

γ)

$$\begin{aligned}
P(184 < X < 216 \mid X > 168) &= \frac{P(184 < X < 216)}{P(X > 168)} \\
&= \frac{P(\frac{184-200<}{16} < \frac{X-200}{16} < \frac{216-200}{16})}{P(\frac{X-200}{16} > \frac{168-200}{16})} \\
&= \frac{P(-1 < Z < 1)}{P(Z > -1,375)} = \frac{\Phi(1) - \Phi(-1)}{1 - \Phi(-1,375)} \\
&= \frac{\Phi(1) - [1 - \Phi(1)]}{1 - [1 - \Phi(1,375)]} = \frac{2\Phi(1) - 1}{\Phi(1,375)} \\
&= \frac{2 \times 0,8413 - 1}{0,9154} = 0,7456.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $P(184 < X < 216) = 0,68$ και με τη δέσμευση γίνεται 0,7456. Έχουμε δηλ. μια πληροφόρηση "θετική" για το ενδεχόμενό μας.

21. Το ύψος (σε εκατοστά) των φοιτητριών της Σχολής Θετικών επιστημών εκτιμάται ότι είναι τυχαία μεταβλητή, έστω X, που ακολουθεί την Κανονική κατανομή με μ=165 και $\sigma^2 = 36$. α)Να υπολογισθεί το ποσοστό των φοιτητριών που έχει ύψος μεγαλύτερο των 170 εκατ. β) Εκλέγονται στην τύχη 20 φοιτήτριες και εξετάζεται το ύψος τους. Ποιά είναι η πιθανότητα τουλάχιστον 10 να έχουν ύψος μεγαλύτερο των 165 εκατ.;

Η τ.μ. $X \sim N(165, 36)$. Για το α) ερώτημα πρέπει να υπολογίσουμε την $P(X > 170)$. Εφαρμόζοντας τη διαδικασία της τυποποίησης και χρησιμοποιώντας τον πίνακα έχουμε

$$\begin{aligned}
P(X > 170) &= P(\frac{X - 165}{6} > \frac{170 - 165}{6}) \\
&= P(Z > 0,8333) = 1 - P(Z \leq 0,8333) \\
&= 1 - \Phi(0,8333) \simeq 1 - 0,7967 = 0,2033.
\end{aligned}$$

Για το β) ερώτημα παρατηρούμε τα ακόλουθα: Το ύψος της κάθε φοιτήτριας είναι ανεξάρτητο από το ύψος οποιασδήποτε άλλης, άρα έχουμε 20 ανεξάρτητα πειράματα και σε κάθε πείραμα εξετάζουμε αν μία φοιτήτρια έχει ύψος μεγαλύτερο από 165 (επιτυχία) ή όχι(αποτυχία), το οποίο συμβαίνει με πιθανότητα 0,5 (γιατί;). Συνεπώς, αν ορίσουμε ως Y τον αριθμό των φοιτητριών με ύψος μεγαλύτερο των 165 εκ., τότε η τ.μ. Y ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους ν=20 και p=0,5. Για τη συγκεκριμένη πιθανότητα έχουμε

$$P(Y \geq 10) = \sum_{y=10}^{20} \binom{20}{y} (0,5)^y (0,5)^{20-y} = \sum_{y=10}^{20} \binom{20}{y} (0,5)^{20}.$$

22. Έστω η τ.μ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Ποιά είναι η πιθανότητα $P(|X| \leq \alpha)$, όπου $\alpha > 0$ σταθερά.

Τα ενδεχόμενα $\{|X| \leq \alpha)\}$, και $\{-\alpha \leq X \leq \alpha\}$ είναι ισοδύναμα. Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} P(|X| \leq \alpha) &= P(-\alpha \leq X \leq \alpha) \\ &= P(\frac{-\alpha-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\alpha-\mu}{\sigma}) \\ &= P(\frac{-\alpha-\mu}{\sigma}) \leq Z \leq \frac{\alpha-\mu}{\sigma}) \\ &= \Phi(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}) - \Phi(-\frac{\alpha+\mu}{\sigma}). \end{aligned}$$

Στο τελευταίο παράδειγμα υπολογίσαμε πιθανότητα που αφορούσε μία νέα τ.μ. έστω $Y = |X|$. Αυτό δεν είναι τόσο εύκολο συνήθως και απαιτείται να προσδιορισθεί η σ.π.π. της νέας τ.μ. που είναι συνάρτηση κάποιας γνωστής κατανομής. Για παράδειγμα, για να προσδιορίσουμε τη σ.π.π. μιας συνεχούς τ.μ. Y ακολουθούμε την εξής διαδικασία: Προσδιορίζουμε την α.σ.κ της και παραγωγίζοντας παίρνουμε τη σ.π.π..

Ας θεωρήσουμε πάλι την παραπάνω περίπτωση και για να απλοποιήσουμε τις πράξεις έστω ότι η τ.μ. $X \sim N(0,1)$, δηλ. ότι ακολουθεί την Τυποποιημένη Κανονική κατανομή. Παρατηρούμε ότι το πεδίο τιμών της τ.μ. Y είναι $R_Y = [0, \infty)$ και η α.σ.κ. της είναι

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) \\ &= \Phi(y) - \Phi(-y) = 2\Phi(y) - 1. \end{aligned}$$

Άρα η σ.π.π. είναι

$$\begin{aligned} \frac{dF_Y(y)}{dy} = f_Y(y) &= 2\varphi(y) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\}, \quad 0 < y < \infty. \end{aligned}$$

Η $f_Y(y)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της διπλωμένης τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

23. Έστω η τ.μ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και η τ.μ. $Y = g(X) = aX + b, \quad a, b \in R$.
Το πεδίο τιμών της τ.μ. Y είναι $R_Y = (-\infty, \infty)$ και η α.σ.κ. $F_Y(y)$ είναι

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y) &= P(aX \leq y - b) \\ &= \begin{cases} P(X \leq \frac{y-b}{a}) & \text{αν } a > 0 \\ P(X \geq \frac{y-b}{a}) & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} F_X(\frac{y-b}{a}) & \text{αν } a > 0 \\ 1 - F_X(\frac{y-b}{a}) & \text{αν } a < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση ως προς y έχουμε

$$\begin{aligned} f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} &= \begin{cases} \frac{1}{a} f_X(\frac{y-b}{a}) & \text{αν } a > 0 \\ -\frac{1}{a} f_X(\frac{y-b}{a}) & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{|a|} f_X(\frac{y-b}{a}) \\ &= \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\frac{y-b}{a} - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &= \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(y - [a\mu + b])^2}{2a^2\sigma^2}\right\}. \end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι η τ.μ. $Y \sim N(\alpha\mu + \beta, (\alpha\sigma)^2)$, που σημαίνει ότι ένας γραμμικός μετασχηματισμός της Κανονικής κατανομής ακολουθεί την Κανονική κατανομή με διαφορετικές παραμέτρους. Αυτή είναι μία από τις σημαντικές ιδιότητες της Κανονικής κατανομής.

Γενικά το να προσδιορίσουμε την α.σ.κ. μιας τ.μ. Y που είναι συνάρτηση μιας άλλης τ.μ., έστω X, απαιτεί ιδιαίτερη ανάλυση. Αναφέρουμε ότι οι συνήθεις περιπτώσεις είναι:
Έστω μία διακριτή τ.μ. X με σ.π. f(x)=P(X=x) και μία διακριτή τ.μ. Y=g(X).
Έστω μία συνεχής τ.μ. X με σ.π.π. f(x) και μία διακριτή τ.μ. Y=g(X).
Έστω μία συνεχής τ.μ. X με σ.π.π. f(x) και μία συνεχή τ.μ. Y=g(X).

Διατυπώνουμε το ακόλουθο θεώρημα που αφορά την τελευταία περίπτωση χωρίς απόδειξη. Σημειώνουμε ότι η απόδειξη ακολουθεί την ίδια μέθοδο όπως αυτή που εφαρμόστηκε για τα παραδείγματα 22 και 23.

Θεώρημα 2. α) Έστω X μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με πεδίο τιμών R_X και σ.π.π. $f_X(x)$. Υποθέτουμε ότι g(x) είναι μία συνάρτηση αυστηρά μονότονη (αύξουσα ή φθίνουσα), διαφορίσιμη (και άρα συνεχής) συνάρτηση του x. Τότε η τυχαία μεταβλητή Y που ορίζεται από σχέση Y=g(X) είναι συνεχής και η σ.π.π. της δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[g^{-1}(y)] \mid \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \mid & \text{αν } y = g(x) \\ 0 & \text{αν } y \neq g(x) \end{cases},$$

όπου $g^{-1}(y)$ η τιμή του x που είναι τέτοια ώστε $g(x) = y$.

β) Άν υπάρχει διαμέριση του R_X, έστω $\{R_1, \ldots, R_n\}, R_i \cap R_j = \emptyset, i \neq j$ και $\sum_{i=1}^n R_i = R_X$, που είναι τέτοια ώστε η συνάρτηση g(x) να πληρεί $\forall x \in R_i, i = 1, \ldots$ τις συνθήκες του α), τότε η τυχαία μεταβλητή Y που ορίζεται από σχέση Y=g(X) είναι συνεχής, έχει πεδίο τιμών $R_Y = \sum_{i=1}^n R_{Y_i}$ και η σ.π.π. της δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n f_X[g_i^{-1}(y)] \mid \frac{dg_i^{-1}(y)}{dy} \mid & \text{αν } y \in R_{Y_i}, i = 1, \ldots, n \\ 0 & \text{αν } y \neq g(x) \end{cases}$$

όπου $g_i^{-1}(y)$ η τιμή του $x \in R_i$ που είναι τέτοια ώστε $g(x) = y \in R_{Y_i}$.

Ας εφαρμόσουμε το θεώρημα στο παρακάτω παράδειγμα.

24. Έστω η τ.μ. $X \sim U(0,1)$, δηλ. ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0,1), άρα $f_X(x) = 1$. Έστω $Y = g(X) = X^\nu$. Η g(x) πληρεί τις συνθήκες του α) μέρους του θεωρήματος και είναι

$$g^{-1}(y) = y^{1/\nu} \text{και } \frac{dg^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\nu} y^{\frac{1}{\nu}-1}.$$

Άρα

$$f_Y(y) = f_X[g^{-1}(y)] \mid \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \mid = \frac{1}{\nu} y^{\frac{1}{\nu}-1}, \quad 0 < y < 1.$$

25. Έστω $X \sim N(0,1)$ και $Y = g(X) = X^2$. Παρατηρούμε ότι

$$R_X = \{-\infty, \infty\} = \{-\infty, 0\} \cup \{0, \infty\} = R_1 \cup R_2$$

και $R_Y = \{0, \infty\}$.

Για $x \in (-\infty, 0)$ η αντίστροφη εικόνα είναι$g_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ και για $x \in$

$(0, \infty)$ έχουμε $g_2^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Οι παράγωγοι των αντιστρόφων συναρτήσεων είναι

$$\frac{dg_1^{-1}(y)}{dy} = \frac{d(-\sqrt{y})}{dy} = -\frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2\sqrt{y}},\ 0 < y < \infty,$$

$$\frac{dg_2^{-1}(y)}{dy} = \frac{d\sqrt{y}}{dy} = \frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{y}},\ 0 < y < \infty.$$

Εφαρμόζοντας το β) του θεωρήματος έχουμε

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(-\sqrt{y}) \mid -\frac{1}{2\sqrt{y}} \mid + f_X(\sqrt{y}) \mid \frac{1}{2\sqrt{y}} \mid \\ &= \frac{1}{\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} exp\{-\frac{y}{2}\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{1/2-1} exp\{-\frac{y}{2}\},\ 0 < y < \infty. \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε ότι η σ.π.π. της Κανονικής είναι συμμετρική και αυτό εφαρμόστηκε στην τελευταία ισότητα. Επίσης με | α | συμβολίζουμε την απόλυτη τιμή του α. Παρατηρούμε ότι η τ.μ Y ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους $\alpha = 1/2, \lambda = 1/2$.

Προφανώς ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, όπως αυτή των παραδειγμάτων 22, 23 καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Κατανομή χ -τετράγωνο

Έστω η τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με $\alpha = r/2, r \in \mathbb{N}$ και $\lambda = 2$, δηλ. έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(r/2)2^{r/2}} x^{r/2\ -1} e^{-x/2}, \quad 0 \leq x \leq \infty.$$

Η τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή χ-τετράγωνο με r βαθμούς ελευθερίας και συνήθως γράφουμε $\chi^2(r)$. Λόγω της σημαντικότητας της σε εφαρμογές της στατιστικής υπάρχουν πίνακες που μας δίνουν πιθανότητες της μορφής $P(X \leq x)$ για διάφορες τιμές του r, όπως φαίνεται στον Πίνακα VII του Παραρτήματος.

Στο παράδειγμα 25 είδαμε ότι η κατανομή του τετραγώνου μιας τυποποιημένης Κανονικής είναι η κατανομή Γάμμα με παραμέτρους $\alpha = 1/2, \lambda = 1/2$. Μπορεί να δειχθεί ότι αν

$$X = Z_1^2 + \ldots + Z_r^2,$$

και οι $Z_i, i = 1, \ldots r$ ανεξάρτητες, τυποποιημένες Κανονικές, τότε η τ.μ. Χ ακολουθεί τη χ-τετράγωνο με r βαθμούς ελευθερίας. Η απόδειξη στηρίζεται στην αναπαραγωγική ιδιότητα της Γάμμα κατανομής.

2.4 Παράμετροι Κατανομών

Μέση Τιμή

Ορισμός 2.9. *Έστω η τ.μ. X. Η Μέση τιμή ή αναμενόμενη τιμή (Expected value) της τ.μ. X συμβολίζεται με E(X) και δίνεται από τη σχέση*

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{r=1}^{\infty} x_r f_X(x_r) & \text{αν η τ.μ. } X \text{ είναι διακριτή} \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx & \text{αν η τ.μ. } X \text{ είναι συνεχής} \end{cases}$$

με την προυπόθεση ότι η σειρά ή το ολοκλήρωμα συγκλίνουν απόλυτα.

Η $E(X)$ έχει τις εξής ιδιότητες:
Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ σταθερά, τότε

$$I_1: \quad E(\alpha X) = \alpha E(X)$$

$$I_2: \quad E(X + \alpha) = \alpha + E(X).$$

$$I_3: \quad \mid E(X) \mid \leq E(\mid X \mid).$$

Έστω οι τ.μ. $X_1, \ldots X_\nu$. Ισχύει η σχέση

$$I_4: \quad E(X_1 + \ldots + X_\nu) = E(X_1) + \ldots + E(X_\nu).$$

Οι αποδείξεις των τριών πρώτων ιδιοτήτων προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό της E(X). Η τέταρτη χρειάζεται περισσότερες έννοιες στις οποίες θα αναφερθούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Τα παρακάτω παραδείγματα αφορούν κυρίως σε κατανομές που έχουμε ήδη αναφέρει.

26. Έστω το πείραμα της ρίψης ενός ζαριού και X η ένδειξη της ρίψης. Τότε η τ.μ. X έχει πεδίο τιμών $R_X = \{1, \ldots, 6\}$ και σ.π.$f_X(x_r) = \frac{1}{6}$, $r = 1, \ldots, 6$. Η κατανομή της τ.μ. X καλείται Διακριτή Ομοιόμορφη κατανομή. Η E(X) είναι

$$E(X) = \sum_{r=1}^{6} r\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$$

Παρατηρούμε ότι η E(X) δεν είναι τιμή της τ.μ. X. Αν και την ονομάζουμε Μέση τιμή ή Αναμενόμενη τιμή, δεν είναι η τιμή που αναμένουμε να πάρει η τ.μ. X, αλλά ο μέσος όρος των τιμών που παίρνει σε μία μεγάλη ακολουθία πειραμάτων. Δηλ., αν θεωρήσουμε ένα μεγάλο αριθμό ρίψεων του ζαριού και πάρουμε τον μέσο όρο των ενδείξεων, τότε προσεγγιστικά αυτός ο μέσος όρος θα είναι η E(X).

27. Έστω η τ.μ. $X \sim U[\alpha, \beta]$, δηλ. η ομοιόμορφη κατανομή. Η μέση τιμή της είναι

$$E(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x\frac{1}{\beta - \alpha} = \frac{1}{\beta - \alpha}[\frac{x^2}{2}]_{\alpha}^{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

28. Έστω η τ.μ. X που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Η μέση τιμή της είναι

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = -\int_0^{\infty} xd(e^{-\lambda x}) \\ &= -\{[xe^{-\lambda x}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx\} \\ &= 0 + [-\frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} d(e^{-\lambda x})] \\ &= -\frac{1}{\lambda}[e^{-\lambda x}]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος εφαρμόσαμε την ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

Παρατηρούμε ότι είναι $E(X) = \frac{1}{\lambda}$. Δηλ., **η μέση τιμή της εκθετικής είναι το αντίστροφο της παραμέτρου της**. Πολλές φορές στις εφαρμογές μας δίνεται η μέση τιμή και αυτό σημαίνει ότι γνωρίζουμε την παράμετρό της. Για παράδειγμα, αν μας δώσουν ότι η τ.μ. X ακολουθεί την εκθετική με μέση τιμή 200, τότε η σ.π.π. της είναι $f_X(x) = \frac{1}{200}e^{-\frac{x}{200}}$.

29.΄Εστω η τ.μ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Είναι
$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx$$
Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ στο παραπάνω ολοκλήρωμα έχουμε
$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma z) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{z^2}{2}\} \sigma dz \\ &= \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{z^2}{2}\} dz + \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z \exp\{-\frac{z^2}{2}\} dz \\ &= \mu, \end{aligned}$$
αφού το πρώτο ολοκλήρωμα είναι η πιθανότητα μιας τυποποιημένης Κανονικής, δηλ., 1 και το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι 0 (γιατι;).

Υπενθυμίζουμε ότι η Κανονική κατανομή είναι συμμετρική περί το σημείο μ, δηλ., περί τη μέση τιμή της.

30.΄Εστω η τ.μ. X που ακολουθεί τη Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p. ΄Εχουμε
$$E(X) = 0(1-p) + 1p = p$$
΄Εστω τώρα η τ.μ. X που ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους ν και p. Είναι
$$E(X) = \sum_{x=0}^{\nu} x \binom{\nu}{x} p^x (1-p)^{\nu-x} = \nu p \sum_{x=0}^{\nu-1} \binom{\nu-1}{x} p^x (1-p)^{\nu-x} = \nu p,$$
αφού το τελευταίο άθροισμα είναι το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων για μία Διωνυμική με παραμέτρους $\nu - 1$ και p.

Το παραπάνω αποτέλεσμα ήταν αναμενόμενο, αφού στην Διωνυμική κατανομή έχουμε ν ανεξάρτητα πειράματα Bernoulli, δηλ., είναι ως να έχουμε άθροισμα ν τ.μ. Bernoulli.

Ας θεωρήσουμε τη Γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας p. Η μέση τιμή της είναι
$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=1}^{\infty} x q^{x-1} p = p \sum_{x=0}^{\infty} (q^x)' \\ &= p(\sum_{x=0}^{\infty} q^x)' = p(\frac{1}{1-q})' = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}, \end{aligned}$$

όπου με $(q^x)'$ συμβολίζουμε την πρώτη παράγωγο ως προς q. Η εναλλαγή παραγώγου και αθροίσματος ισχύει στην προκειμένη περίπτωση.

31. Ας θεωρήσουμε την τ.μ. X που ακολουθεί την κατανομή Poisson. Η μέση τιμή της είναι

$$E(X) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \kappa e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{\kappa!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(\kappa-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

Αν θεωρήσουμε την στοχαστική ανέλιξη Poisson, τότε έχουμε

$$E(X(t)) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \kappa e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{\kappa!} = \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(\kappa-1)!} = \lambda t e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = \lambda t.$$

Παρατηρούμε ότι στην πρώτη περίπτωση η μέση τιμή είναι η παράμετρος λ, ενώ στην δεύτερη λt, δηλ. είναι συνάρτηση του χρόνου, όπως ήταν αναμενόμενο. Ο αναγνώστης παραπέμπεται στους ορισμούς 1 και 2 της Poisson.

Στη συνέχεια δίνουμε δύο απλά παραδείγματα για την περίπτωση που η μέση τιμή δεν υπάρχει.

32. Έστω η διακριτή τ.μ. X με πεδίο τιμών $R_X = \{2, 2^2, 2^3, \dots\}$ και συνάρτηση πιθανότητας

$$f_X(x_k) = P(X = 2^k) = \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad .$$

Είναι

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(X = x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k} = 1 + 1 + 1 \dots,$$

που αποκλίνει και άρα η E(X) δεν υπάρχει. Παρατηρούμε ότι και οι ροπές μεγαλύτερης τάξης δεν υπάρχουν.

33. Έστω η συνεχής τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \frac{1}{x^2}, 1 \leq x < \infty.$$

Η μέση τιμή της είναι

$$E(X) = \int_1^{\infty} x f_X(x) dx = \int_1^{\infty} x \frac{1}{x^2} dx = \log x|_1^{\infty} = \infty.$$

Άρα η μέση τιμή δεν υπάρχει, καθώς και οι ροπές μεγαλύτερης τάξης.

Ροπές Τυχαίας Μεταβλητής

Για να ορίσουμε τις ροπές μιας τυχαίας μεταβλητής μας είναι απαραίτητο το ακόλουθο θεώρημα που αφορά στη μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής που είναι συνάρτηση μιας άλλης, έστω $Y = g(X)$, όπως αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Θεώρημα 2.2. *Έστω η τ.μ. $Y = g(X)$. Ισχύουν οι σχέσεις*

$$E(Y) = E[g(X)] = \begin{cases} \sum_{r=1}^{\infty} g(x_r) f_X(x_r) & \textit{αν η τ.μ. } X \textit{ είναι διακριτή} \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx & \textit{αν η τ.μ. } X \textit{ είναι συνεχής} \end{cases}$$

με την προυπόθεση ότι η σειρά και το ολοκλήρωμα συγκλίνουν απόλυτα.

Η απόδειξη παραλείπεται. Επισημαίνουμε ότι το θεώρημα αυτό είναι εξαιρετικά χρήσιμο, αφού για να υπολογισθεί η μέση τιμή της Y πρέπει να προσδιορισθεί η σ.π. αν είναι διακριτή ή σ.π.π. της αν είναι συνεχής, το οποίο δεν είναι τόσο απλό όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Έτσι, το θεώρημα μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε τη μέση τιμή της Y χρησιμοποιώντας τη γνωστή μας σ.π. ή σ.π.π. της τ.μ. X. Πολλοί συγγραφείς στην διεθνή βιβλιογραφία αναφέρουν το θεώρημα αυτό ως "Law of the Unconcious Statistician".

Ας δούμε το εξής απλό παράδειγμα για να διαπιστώσουμε το μέγεθος της απλοποίησης των υπολογισμών: Έστω ότι η τ.μ. X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0, 1] και έστω ότι $Y = e^X$. Η μέση τιμή της τ.μ. Y σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα υπολογίζεται άμεσα και είναι

$$E(Y) = E(e^X) = \int_0^1 e^x dx = e - 1, \quad \text{αφού} \quad f(x) = 1,\ 0 \leq x \leq 1.$$

Διαφορετικά, υπολογίζουμε την σ.π.π. της τ.μ. Y ακολουθώντας τη διαδικασία που αναπτύξαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Πρώτα προσδιορίζουμε την α.σ.κ που είναι

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \log y) \\ &= F_X(\log y) = \int_0^{\log y} 1 dx = \log y, \end{aligned}$$

άρα η σ.π.π. της τ.μ. Y είναι

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{y}, \quad 1 \le y \le e.$$

Τέλος, από τον ορισμό της μέσης τιμής έχουμε

$$E(Y) = \int_1^e y\, \frac{1}{y}\, dy = e - 1.$$

Ορισμός 2.10. *α) Η μεση τιμή*

$$E[(X-c)^s] = \begin{cases} \sum_{r=1}^{\infty}(x_r - c)^s f_X(x_r) & \text{αν η τ.μ. } X \text{ είναι διακριτή} \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty}(x-c)^s f_X(x)dx & \text{αν η τ.μ. } X \text{ είναι συνεχής} \end{cases}$$

καλείται **ροπή s τάξης περί το σημείο c**, $s = 1, 2, \ldots$ *και c σταθερά.*

β) Η μέση τιμή

$$E[(X)^s] = \begin{cases} \sum_{r=1}^{\infty}(x_r)^s f_X(x_r) & \text{αν η τ.μ. } X \text{ είναι διακριτή} \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty}(x)^s f_X(x)dx & \text{αν η τ.μ. } X \text{ είναι συνεχής} \end{cases}$$

καλείται **ροπή s τάξης περί την αρχή 0**, $s = 1, 2, \ldots$.

Ορισμός 2.11. *α) Η μέση τιμή*

$$E[(X-\mu)^2] = \begin{cases} \sum_{r=1}^{\infty}(x_r - \mu)^2 f_X(x_r) & \text{αν η τ.μ. } X \text{ είναι διακριτή} \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f_X(x)dx & \text{αν η τ.μ. } X \text{ είναι συνεχής} \end{cases}$$

καλείται **Διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X***(Variance of the random variable X).*

Συνήθως συμβολίζεται με σ^2 ή $V(X)$.

β) Η θετική τετραγωνική ρίζα της Διασποράς καλείται **Τυπική απόκλιση** *και συνήθως συμβολίζεται με σ. Είναι δηλ.,*

$$\sqrt{E[(X-\mu)^2]} \equiv \sqrt{\sigma^2} = \sigma.$$

Για μπορούν να υπολογισθούν οι παραπάνω ροπές πρέπει οι σειρές και τα ολοκληρώματα να συγκλίνουν.

Παρατηρήσεις α) Για μπορούν να υπολογισθούν οι παραπάνω ροπές πρέπει οι σειρές και τα ολοκληρώματα να συγκλίνουν.
β) Η τυπική απόκλιση μας δίνει ένα μέτρο της διασποράς των τιμών της τ.μ. γύρω από τη μέση τιμή. Θεωρούμε τη θετική τετραγωνική ρίζα της διασποράς γιατί εκφράζεται στις ίδιες μονάδες (γραμμάρια, εκατοστά, κ.λ.π.) με την τ.μ., όπως και η μέση τιμή. Το ζευγάρι (μ, σ^2) θεωρούνται οι πιο σημαντικές ροπές για τις πληροφορίες που μας δίνουν για την συμπεριφορά της κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής.
γ)Είναι προφανές ότι η διασπορά είναι η δεύτερη ροπή περί το σημείο μ, καθώς και ότι η μέση τιμή είναι πρώτη ροπή περί την αρχή 0.
δ)Η μέση τιμή μπορεί να θεωρηθεί ως αντίστοιχη του κέντρου βάρους στη μηχανική, ενώ η διασπορά ως αντίστοιχη της ροπής αδράνειας περί το κέντρο βάρους.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τη Διασπορά, η οποία έχει τις εξής βασικές ιδιότητες:
Ι1
$$V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
Ι2
$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$
Ι3
$$V(\sum_{\kappa=1}^{\nu} X_\kappa) = \sum_{\kappa=1}^{\nu} V(X_\kappa) \quad \text{αν } X_1, \ldots, X_\nu \quad \text{είναι ανεξάρτητες.}$$

Τονίζουμε ότι η τελευταία ιδιότητα αφορά σε **ανεξάρτητες** τυχαίες μεταβλητές. Με τον όρο ανεξάρτητες εννοούμε το εξής:

Ας θεωρήσουμε δύο τυχαίες μεταβλητές, έστω X, Y και τα ενδεχόμενα $B_X \in \mathcal{B}_X$ και $B_Y \in \mathcal{B}_Y$. Αν ισχύει η σχέση
$$P(B_X \cap B_Y) = P(B_X)P(B_Y), \forall B_X \in \mathcal{B}_X \text{ και } B_Y \in \mathcal{B}_{YX},$$
τότε οι τ.μ. X, Y καλούνται ανεξάρτητες.

Οι αποδείξεις των ιδιοτήτων Ι1 και Ι2 είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της διασποράς.

Σημειώνουμε ότι για τον υπολογισμό της διασποράς χρησιμοποιούμε συνήθως τη σχέση που δίνεται από τη Ι2.Ο υπολογισμός της $E(X^2)$ στις διακριτές τ.μ. που παίρνουν ακέραιες θετικές τιμές, όπως είναι η Διωνυμική, Γεωμετρική και η Poisson, είναι αρκετά πολύπλοκος. Απλουστεύεται κατά πολύ με την χρησιμοποίηση των εξής ροπών:

Ορισμός 2.12. *Έστω η τ.μ. X που παίρνει ακέραιες θετικές τιμές. Η μέση τιμή*

$$E[X(X-1)\ldots(X-s+1)] \equiv E[(X)_s] = \sum_{r=s}^{\infty} r(r-1)\ldots(r-s+1)f_X(r), s = 1, 2, \ldots$$

καλείται **Παραγοντική Ροπή s τάξης**.

Εφαρμόζοντας ιδιότητες της μέσης τιμής παρατηρούμε ότι ισχύει η σχέση

$$E[X(X-1)] = E(X^2-X) = E(X^2)-E(X) \quad ή \quad E(X^2) = E[X(X-1)]+E(X)$$

η οποία συνεπάγεται τη σχέση

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E[X(X-1)] + E(X) - [E(X)]^2.$$

Αυτή τη σχέση θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια για να υπολογίσουμε τη διασπορά των διακριτών τυχαίων μεταβλητών που ήδη έχουμε μελετήσει.

34. Έστω η τ.μ. X που ακολουθεί τη Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p. Έχουμε

$$E(X^2) = 0(1-p) + 1^2 p = p, V(X) = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Έστω τώρα η τ.μ. X που ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους ν και p. Είναι

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{x=1}^{\nu} x(x-1)\binom{\nu}{x} p^x (1-p)^{\nu-x} \\ &= \nu(\nu-1)p^2 \sum_{x=0}^{\nu-2} \binom{\nu-2}{x} p^x (1-p)^{\nu-x} \\ &= \nu(\nu-1)p^2, \end{aligned}$$

όπου το τελευταίο άθροισμα είναι το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων μιας Διωνυμικής με παραμέτρους ν-2 και p, άρα ισούται με 1. Για τη διασπορά έχουμε

$$V(X) = \nu(\nu-1)p^2 + \nu p - (\nu p)^2 = \nu p - \nu p^2 = \nu p(1-p) = \nu pq.$$

Το ότι η $V(X) = \nu pq$ είναι αναμενόμενο, αφού η Διωνυμική μπορεί να θεωρηθεί ως άθροισμα ν ανεξαρτήτων τ.μ. Bernoulli.

Ας θεωρήσουμε τη Γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας p. Η μέση τιμή της είναι $E(X) = \frac{1}{p}$. Για την παραγοντική ροπή 2ας τάξη έχουμε

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)q^{x-1}p = qp\sum_{x=0}^{\infty}(q^x)'' \\ &= qp(\sum_{x=0}^{\infty} q^x)'' = qp(\frac{1}{1-q})'' = qp\frac{2(1-q)}{(1-q)^4} \\ &= qp\frac{2}{p^2} = \frac{2q}{p^2}, \end{aligned}$$

όπου με $(q^x)'$ συμβολίζουμε τη δεύτερη παράγωγο ως προς q και η εναλλαγή παραγώγου και αθροίσματος επιτρέπεται στην παρούσα περίπτωση. Άρα για τη διασπορά έχουμε

$$V(X) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

35. Ας θεωρήσουμε την τ.μ. X που ακολουθεί την κατανομή Poisson. Η μέση τιμή της είναι $E(X) = \lambda$. Για τη δεύτερη παραγοντική ροπή έχουμε

$$E[X(X-1)] = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \kappa(\kappa-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{\kappa!} = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{\kappa=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(\kappa-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^2.$$

Άρα

$$V(X) = \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2 = \lambda.$$

Αν θεωρήσουμε την στοχαστική ανέλιξη Poisson, τότε έχουμε

$$V(X(t)) = \lambda t.$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τη διασπορά συνεχών τυχαίων μεταβλητών. Στην περίπτωση αυτή θα εφαρμόσουμε τον τύπο της διασποράς

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

και για τον υπολογισμό της $E(X^2)$ τον τύπο

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx.$$

36. Έστω η τ.μ. $X \sim U[\alpha, \beta]$, δηλ. η ομοιόμορφη κατανομή. Η μέση τιμή της είναι $E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Για τη ροπή δευτέρας τάξης περί την αρχή Ο έχουμε

$$E(X^2) = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{1}{\beta - \alpha}[\frac{x^3}{3}]_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta^2 - \alpha\beta + \alpha^2}{3}.$$

και

$$V(X) = \frac{\beta^2 - \alpha\beta + \alpha^2}{3} - (\frac{\alpha + \beta}{2})^2 = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}.$$

37. Έστω η τ.μ. X που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Η μέση τιμή της είναι $E(X) = \frac{1}{\lambda}$. Εφαρμόζοντας δύο φορές την ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε

$$E(X^2) = \int_{0}^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

και επομένως

$$V(X) = \frac{2}{\lambda^2} - (\frac{1}{\lambda})^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

38.Για να υπολογίσουμε τη διασπορά της τ.μ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ εφαρμόζουμε τον ορισμό της διασποράς, γιατί μας διευκολύνει στις πράξεις. Έχουμε

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ στο παραπάνω ολοκλήρωμα έχουμε

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \exp\{-\frac{z^2}{2}\} dz \\
&= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z d \exp\{-\frac{z^2}{2}\} \\
&= [-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} z \exp\{-\frac{z^2}{2}\}]_{-\infty}^{\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\frac{z^2}{2}\} dz \\
&= 0 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} 2\sqrt{2} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
&= \sigma^2.
\end{aligned}$$

Άρα η παράμετρος σ^2 της Κανονικής είναι η διασπορά της. Στη γραφική παράσταση της σ.π.π. Κανονικής γίνεται φανερή η σημασία του ζευγαριού (μ, σ^2).

Ασκήσεις

1. Έστω η συνεχής τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = \frac{3}{2}x^2 . -1 < x < 1$. Να υπολογισθούν: 1) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής και στη συνέχεια η πιθανότητα $P(X < 1/2 | X > -1/2)$. 2) η μέση τιμή E(X)και η διασπορά V(X). 3) Θεωρείστε 10 ανεξάρτητες παρατηρήσεις από την παραπάνω κατανομή και έστω Z ο αριθμός των παρατηρήσεων με τιμή μεγαλύτερη από 1/2. Ποια είναι η πιθανότητα $P(Z \leq 2)$; Ποια είναι η E(Z) και η V(Z);

2. Έστω η τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την N(9, 25). Να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(4 < X < 14), P(X < 19 | X > 9)$. Έστω Y η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει τον αριθμό των ανεξαρτήτων πειραμάτων που απαιτούνται έως ότου να καταγραφεί για πρώτη φορά μία παρατήρηση μεγαλύτερη από 9 από την κατανομή της X. Ποια κατανομή ακολουθεί η τ.μ. Y; Να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(Y > 2), P(Y > 4 | Y > 2)$, καθώς και οι παράμετροι E(Y), V(Y).

3. Έστω η διακριτή τυχαία μεταβλητή X που παίρνει τις τιμές 3, 4, 7, 8, 10 με αντίστοιχες πιθανότητες 1/12, 1/4, 1/6, 1/6, ; . Να υπολογισθούν τα ακόλουθα: 1) P(X=10). 2) η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της $F_X(x), \forall\, x \in R$. 3) Η πιθανότητα $P(X \leq 0 | X \geq 4)$, καθώς και οι παράμετροι E(X) V(X).

4. Έστω η συνεχής τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = cx^4, -1 < x < 1$. Να υπολογισθούν α)η σταθερά c για να είναι η $f(x)$ σ.π.π. . β) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(x), -\infty < x < \infty$. γ) η μέση τιμή E(X) και η διασπορά V(X). δ) Έστω η τυχαία μεταβλητή $Y = \frac{2}{5}X + 1$. Να προσδιορισθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της, καθώς και οι παράμετροι E(Y), V(Y).

5. Έστω η τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την Κανονική κατανομή με $\mu = 0$ και$\sigma^2 = 4$. Να προσδιορισθεί η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y που παίρνει τις τιμές $R_Y = \{-1, 0, 1\}$, αν αντίστοιχα η τυχαία μεταβλητή X παίρνει τις τιμές $\{-\infty < X < -2, \quad -2 \leq X < 2, \quad 2 \leq X < \infty\}$. Να υπολογισθούν οι παράμετροι E(Y) και V(Y).

6. Ο χρόνος ζωής, έστω X, ενός ηλεκτρονικού μηχανήματος ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέσο χρόνο ζωής 2000 ώρες. α) Δέκα τέτοια μηχανήματα εκλέγονται τυχαία και ελέγχονται ως προς το χρόνο ζωής τους. Ποια είναι η πιθανότητα να βρεθεί τουλάχιστον ένα με χρόνο ζωής μεγαλύτερο από 2000 ώρες; Αν η εταιρεία που τα παράγει επιθυμεί να δώσει κάποια εγγύηση, ποιο χρόνο εγγύησης, έστω T, πρέπει να δώσει έτσι ώστε με πιθανότητα 0,98 να μη επιστρέφονται μηχανήματα;

7. Έστω η τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την Κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ Αν $P(X < 80) = 1/2$ και $P(X < 70) = 1/4$ να υπολογισθούν οι παράμετροι της κατανομής μ, σ^2 και να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(X < 80|X > 70)$.

8. Έστω ότι οι φοιτητές της Σχολής Θετικών Επιστημών έχουν ύψος (σε εκατοστά) που ακολουθεί την Κανονική κατανομή με $\mu = 172 και \sigma^2 = 16$. Γίνεται το ακόλουθο πείραμα: Επιλέγεται τυχαία ένας φοιτητής και αν έχει ύψος μεγαλύτερο από 176 τότε το πείραμα σταματάει, αν όχι συνεχίζεται έως ότου βρεθεί κάποιος με ύψος μεγαλύτερο από 176. Ποια είναι η πιθανότητα να απαιτηθούν 10 πειράματα; Ποιος είναι ο μέσος αριθμός πειραμάτων που απαιτούνται για να τερματιστεί το πείραμα;

9. Το σφάλμα, έστω X, που κάνει ένας μετρητής ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $U(0,001, 0,002)$. Δεδομένου ότι ένα σφάλμα σε μια τυχαία μέτρηση είναι μεγαλύτερο από 0,0015 ποια είναι η πιθανότητα το σφάλμα να είναι μικρότερο από 0,0018; Σε δέκα τυχαίες μετρήσεις ποια είναι η πιθανότητα να βρεθεί τουλάχιστον μία με σφάλμα μεγαλύτερο από 0,0015;

10. Έστω ότι ο χρόνος ζωής X σε ώρες μιας λυχνίας είναι τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = \frac{100}{x^2}, x > 100$.

Υποθέτοντας ότι οι λυχνίες λειτουργούν ανεξάρτητα η μία της άλλης ποια είναι η πιθανότητα από 5 λυχνίες που αρχίζουν να λειτουργούν ταυτόχρονα να χρειαστεί να αντικατασταθούν 2 κατά τη διάρκεια των πρώτων 150 ωρών λειτουργίας; Ποιος ο αναμενόμενος αριθμός λυχνιών που αντικαθίστανται κατά τις πρώτες 150 ώρες;

11. Έστω η συνεχής τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = cx(2-x), 0 < x < 2$. Να υπολογισθεί η σταθερά c. Να προσδιορισθεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(x), \quad x \in R$. Να υπολογισθεί η E(X) και η V(X).

12. Έστω η συνεχής τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = c(4x - 2x^2), 0 < x < 2$. Να υπολογισθεί η σταθερά c. Να προσδιορισθεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(x), \quad x \in R$ και η πιθανότητα $P(X > 1|X \geq 1/3)$. Να υπολογισθεί η E(X) και η V(X).

13. Η ταχύτητα ενός μορίου σε ένα ομοιογενές αέριο είναι τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = ax^2 e^{-bx^2}, \quad x \geq 0,$$

όπου $b = \frac{m}{2kT}$ και τα k, T, m τη σταθερά Boltzmann, την απόλυτη θερμοκρασία και τη μάζα του μορίου αντίστοιχα. Να προσδιορισθεί η σταθερά a συναρτήσει του b.

14. Έστω η συνεχής τυχαία μεταβλητή X με αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = 0, \, \forall \, x < 0, \quad F(x) = \frac{1}{2}x, \, 0 \leq x \leq 2, \quad F(x) = 1, \, \forall \, x > 2$$

και έστω η τυχαία μεταβλητή $Y = X^2$. Να υπολογισθούν τα ακόλουθα: α) $P(1/2 \leq X \leq 3/2)$, β) $P(1 \leq X < 2)$, γ) $P(Y \leq X)$ δ) $P(X \leq 2Y)$, ε) $P(X + Y \leq 3/4)$, ζ) Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $Z = \sqrt{X}$.

15. Έστω η τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την κατανομή Poisson με $\sigma^2 = 3$. Να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(X \leq 2)$.

16. Έστω η τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την κατανομή Poisson. Αν ισχύει η σχέση $3P(X = 1) = P(X = 2)$, να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(X = 5)$.

17. Έστω η συνεχής τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = 1 - |x-1|, \quad 0 \leq x \leq 2$. Να προσδιορισθεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(x), \quad \forall x \in R$ και στη συνέχεια να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(X \leq 3/2 | X > 1/2)$.

18. Για τις παρακάτω περιπτώσεις συναρτήσεων να προσδιορισθεί η σταθερά c έτσι ώστε να είναι συναρτήσεις πυκνοτήτων πιθανοτήτων:
α) $f(x) = x^3/4, \quad 0 < x < c$ β) $(3/16)x^2, \quad -c < x < c$ γ) $4x^c, \quad 0 < x < 1$. Για τις παραπάνω περιπτώσεις να υπολογισθούν οι παράμετροι E(X) και V(X).

19. Έστω η συνεχής τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = (3/2)x^2, \quad -1 < x < 1$. Να δειχθεί ότι η τυχαία μεταβλητή $Y = (X^3+1)/2$ ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή U(0,1).

20. Έστω η συνεχής τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = \xi/x^3, \quad 1 < x < \infty$. Να προσδιορισθεί η σταθερά ξ. Να υπολογισθεί η E(X) και να δειχθεί ότι η V(X) δεν υπάρχει.

21. Ο χρόνος ζωής, έστω X, μιας ηλεκτρονικής λυχνίας που παράγεται από συγκεκριμένη διαδικασία είναι τυχαία μεταβλητή με σ.π.π. $f(x) = \alpha^2 x e^{-\alpha x}, \quad x \geq 0$. Να δειχθεί ότι
$E(X) = \frac{2}{\alpha}$ και $P(X \geq \kappa) = (1+\alpha\kappa)e^{-\alpha\kappa}, \quad \kappa \geq 0$.
Ένας μηχανικός προτείνει στον παραγωγό αλλαγή της διαδικασίας παραγωγής που επιτυγχάνει αύξηση του μέσου χρόνου ζωής σε $E(X) = \frac{2}{\beta}, \quad \beta < \alpha$. Επειδή η αλλαγή κοστίζει ο παραγωγός δέχεται με τον όρο ότι η πιθανότητα $P(X \geq \kappa)$ αυξάνεται κατά ένα ποσοστό θ. Να δειχθεί ότι η συνθήκη του παραγωγού εκφράζεται από τη σχέση

$$\beta < \alpha - \frac{1}{\kappa}\ln(1+\theta).$$

22. Έστω η διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = (\frac{1}{2})^x, \quad x = 1, 2, \ldots$ και έστω η τ.μ. Y που ορίζεται ως εξής: $Y = 1$, αν X άρτιος και $Y = -1$ αν X περιττός. Να προσδιορισθεί η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. Y, καθώς και οι παράμετροι E(Y) και V(Y).

23. Είναι γνωστό ότι η ετήσια βροχόπτωση (μετρημένη σε κατάλληλες μονάδες) μιας περιοχής είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την Κανονική κατανομή με $\mu = 45$ και $\sigma^2 = 9$. Ποια είναι η πιθανότητα ξεκινώντας από αυτό το έτος να περιμένουμε 6 έτη έως ότου έχουμε μία χρονιά με βροχόπτωση λιγότερη από 39; Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός ετών για να εμφανισθεί το συγκεκριμένο ενδεχόμενο; Ποια είναι η πιθανότητα δεδομένου ότι είχαμε 2 έτη με βροχόπτωση μεγαλύτερη από 39 να έχουμε άλλα 3 έτη στη συνέχεια με το ίδιο φαινόμενο (ενδεχόμενο); Ποιες υποθέσεις κάνετε για να εφαρμόσετε συγκεκριμένη κατανομή;

24. Ο χρόνος επισκευής μια μηχανής (σε ώρες) ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 1/3$. α) Ποια είναι η πιθανότητα για μια επισκευή να απαιτηθεί χρόνος περισσότερος από 3 ώρες; β) Ποια είναι η πιθανότητα δεδομένου ότι μια επισκευή έχει διαρκέσει περισσότερο από 4 ώρες να διαρκέσει τουλάχιστον 8 ώρες; Θεωρώντας 10 τέτοιες επισκευές ανεξάρτητες η μια της άλλης ποια είναι η πιθανότητα σε τουλάχιστον μια να απαιτηθεί χρόνος μεγαλύτερος από 3 ώρες;

Κεφάλαιο 3

Διδιάστατες Τυχαίες Μεταβλητές

3.1 Εισαγωγικές Έννοιες

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ασχοληθήκαμε με μία τυχαία μεταβλητή. Σε πολλές εφαρμογές είναι σημαντικό να εξετάζονται δύο ή περισσότερες τυχαίες μεταβλητές από κοινού. Ας θεωρήσουμε τις τυχαίες μεταβλητές X και Y. Το ενδεχόμενο $\{X \leq x, Y \leq y\}$ είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο $\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}$, δηλ. εκφράζει την πραγματοποίηση και των δύο ενδεχομένων. Για να υπολογίσουμε τέτοιου είδους πιθανότητες είναι αναγκαίο να προσδιορισθεί η από κοινού συμπεριφορά των δύο τυχαίων μεταβλητών και αυτό αποτελεί το αντικείμενο μελέτης αυτού του κεφαλαίου. Η γνώση αυτή μας επιτρέπει να προσδιορίζουμε νέες τυχαίες μεταβλητές, όπως π.χ. Z=X+Y, Z=X-Y, Z=XY, Z=X/Y, $Z = max\{X, Y\}$, $Z = min\{X, Y\}$, καθώς και πολυπλοκότερων μορφών που έχουν ενδιαφέρον σε συγκεκριμένες εφαρμογές. Η γενίκευση για περισσότερες των δύο τυχαίες μεταβλητές είναι άμεση. Συνήθως, αναφερόμαστε σε μία διδιάστατη τυχαία μεταβλητή, έστω $Z = (X, Y)'$, η στις τυχαίες μεταβλητές X, Y. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής στην περίπτωση αυτή δίνεται από τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.1. *Η συνάρτηση*

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y),\ -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty$$

καλείται **από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής** *της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής $(X, Y)'$ ή των τυχαίων μεταβλητών X, Y.*

Η από κοινού α.σ.κ. έχει τις εξής ιδιότητες:

I1: Είναι $0 \le F(x, y) \le 1$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$.

I2:Η $F(x, y)$ είναι αύξουσα ως προς κάθε μία από τις μεταβλητές x, y.

I3:

$$\lim_{x\to-\infty}(F(x, y) = \lim_{y\to-\infty} F(x, y) = 0, \lim_{x,y\to\infty} F(x, y) = 1.$$

I4: Η $F(x, y)$ είναι από δεξιά συνεχής και αν οι X, Y είναι συνεχείς, τότε η $F(x, y)$ είναι συνεχής συνάρτηση.

I5: Ισχύει η σχέση

$$P(\alpha < X \le \beta,\, \gamma < Y \le \delta) = F(\beta, \delta) - F(\alpha, \delta) - F(\beta, \gamma) + F(\alpha, \gamma).$$

Παρατηρούμε ότι αν $y \to \infty$, τότε το ενδεχόμενο $\{X \le x, Y \le y\}$ τείνει στο $\{X \le x, Y < \infty\} = \{X \le x\}$. Άρα έχουμε τις εξής σχέσεις

$$\lim_{y\to\infty} F(x, y) = F_X(x) \text{ και } \lim_{x\to\infty} F(x, y) = F_Y(y).$$

Οι δύο τελευταίες σχέσεις καλούνται **περιθώριες αθροιστικές συναρτήσεις κατανομών** των X και Y όταν είναι γνωστή η από κοινού α.σ.κ. τους $F(x, y)$.

3.2 Διακριτές Διδιάστατες Τυχαίες Μεταβλητές

Ορισμός 3.2. *Η διδιάστατη τ.μ. (X,Y) καλείται διακριτή αν με πιθανότητα 1 παίρνει πεπερασμένο ή το πολύ αριθμήσιμο πλήθος τιμών.*

Ορισμός 3.3. *Η συνάρτηση*

$$f(x_r, y_s) = P(X = x_r, Y = y_s),\; r, s = 0, 1, 2, \ldots$$

καλείται **από κοινού συνάρτηση πιθανότητας** *της (X,Y).*

Η συνάρτηση $f(x_r, y_s)$ έχει τις εξής ιδιότητες

$$f(x_r, y_s) \ge 0,\; \forall\, x_r, y_s$$

και

$$\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} f(x_r, y_s) = 1.$$

Θεώρημα 3.1. *Έστω η διδιάστατη τ.μ.* (X, Y) *με από κοινού σ.π.* $f(x_r, y_s), x_0 < x_1 < \ldots < x_r < x_{r+1} < \ldots, y_0 < y_1 < \ldots < y_s < y_{s+1} \ldots$ *και από κοινού α.σ.κ.* $F(x, y)$*. Ισχύουν οι σχέσεις*

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \forall\, x < x_0, -\infty < y < \infty \\ & \textit{και}\ \forall\, y < y_0, -\infty < x < \infty \\ \sum_{r=0}^{i} \sum_{s=0}^{j} f(x_r, y_s), & x_i \leq x < x_{i+1}, y_j \leq y < y_{j+1}, i, j = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

και

$$f(x_r, y_s) = F(x_r, y_s) - F(x_{r-1}, y_s) - F(x_r, y_{s-1}) + F(x_{r-1}, y_{s-1}) r, s = 0, 1, 2, \ldots$$

Η απόδειξη του θεωρήματος προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς 3.1 και 3.3.

Ορισμός 3.4. *Η συνάρτηση*

$$f_X(x_r) = \sum_{s=0}^{\infty} f(x_r, y_s)$$

καλείται **περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας** *της τ.μ.* X.

Αντίστοιχα η συνάρτηση

$$f_Y(y_s) = \sum_{r=0}^{\infty} f(x_r, y_s)$$

καλείται **περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας** *της τ.μ.* Y.

Παρατηρούμε ότι πράγματι οι συναρτήσεις $f_X(x_r), f_Y(y_s)$ είναι συναρτήσεις πιθανοτήτων, αφού είναι μη αρνητικές $\forall\, x_r, y_s, r, s = 0, 1, \ldots$ και

$$\sum_{r=0}^{\infty} f_X(x_r) = 1, \ \sum_{s=0}^{\infty} f_Y(y_s) = 1.$$

Παραδείγματα

1. Ένα πρόγραμμα εκτελείται από συγκεκριμένο ηλεκτρονικό κέντρο σε δύο φάσεις. Οι χρόνοι εκτέλεσης των 2 φάσεων είναι τυχαίες μεταβλητές, έστω X, Y και παίρνουν διακριτές τιμές με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας που δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας I

$X \backslash Y$	1	2	3	4	$f(x_r)$
1	1/4	1/16	1/16	1/8	1/2
2	1/16	1/8	1/4	1/16	1/2
$f(y_s)$	5/16	3/16	5/16	3/16	1

Κάθε ενδεχόμενο $[X = x, Y = y]$ μπορεί να παρασταθεί ως ένα σημείο στο σύστημα συντεταγμένων (x, y) με πιθανότητα $P(X = x, Y = y)$ που είναι μία στήλη κάθετη στο επίπεδο (x, y) πάνω από το συγκεκριμένο σημείο. Στο σχήμα 3.1 γίνεται μια προσπάθεια απεικόνισης των από κοινού πιθανοτήτων. Ας υπολογίσουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής για $x = 1$ και $y = 3$. Είναι

$$\begin{aligned} F(1,3) &= P(X \leq 1, Y \leq 3) \\ &= P(X = 1, Y = 1) + P(X = 1, Y = 2) + P(X = 1, Y = 3) = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Έστω ότι η πρώτη φάση χρειάστηκε 2 χρονικές μονάδες. Με δεδομένο αυτό το στοιχείο ποια είναι η πιθανότητα στη δεύτερη φάση να απαιτηθούν 4 χρονικές μονάδες; Ζητάμε, δηλ., την πιθανότητα $P(Y = 4|X = 2)$. Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε

$$P(Y = 4|X = 2) = \frac{P(X = 2, Y = 4)}{P(X = 2)} = \frac{1/16}{1/2} = \frac{1}{8}.$$

2. Έστω ότι το 15% των οικογενειών μιας πόλης δεν έχουν παιδιά, το 20% έχει ένα παιδί, το 35% έχει 2 παιδιά και το 30% έχει 3 παιδιά. Έστω ότι σε κάθε οικογένεια το ενδεχόμενο ένα παιδί να είναι αγόρι είναι ισοπίθανο με το ενδεχόμενο να είναι κορίτσι. Ας ορίσουμε την τυχαία μεταβλητή X ως τον αριθμό των αγοριών και Y ως τον αριθμό των κοριτσιών στις οικογένειες της συγκεκριμένης πόλης. Τότε η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X, Y δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας II

$X \backslash Y$	0	1	2	3	$f(x_r)$
0	0,15	0,10	0,0875	0.0375	0,375
1	0,10	0,175	0,1125	0	0,3875
2	0,0875	0,1125	0	0	0,20
3	0,0375	0	0	0	0,0375
$f(y_s)$	0,375	0,3875	0,20	0,0375	1

Για παράδειγμα, η πιθανότητα $P(X=0,Y=0)$= P(κανένα παιδί)= 0,15, $P(X=0,Y=1)$= P(ένα κορίτσι και η οικογένεια έχει 1 παιδί)= $0,20\times 1/2$, $P(X=0,Y=2)$=P(2 κορίτσια και η οικογένεια έχει 2 παιδιά)= $0,35\times(1/2)^2$, $P(X=0,Y=3)$=P(3 κορίτσια και η οικογένεια έχει 3 παιδιά)=$0,30\times(1/2)^3$, κ.λ.π. $P(X=1,Y=2)$=P(η οικογένεια έχει 3 παιδιά από τα οποία το ένα είναι αγόρι και τα 2 είναι κορίτσια)= $0,30\times\binom{3}{1}(1/2)(1/2)^2=0,1125$. Δηλ., η κάθε από κοινού πιθανότητα είναι η πιθανότητα του αριθμού των παιδιών επί μία πιθανότητα που προκύπτει από τη Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους ν=τον αριθμό των παιδιών και p=1/2.

Παρατηρούμε ότι αν προσθέσουμε όλες τις πιθανότητες της πρώτης γραμμής, τότε παίρνουμε την $P(X=0)$. Ανάλογα έχουμε τις υπόλοιπες πιθανότητες της τ.μ. X που εμφανίζονται στην τελευταία στήλη, δηλ. στο περιθώριο. Από αυτή την εμφάνιση των πιθανοτήτων προκύπτει και ο όρος **περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας**. Το ίδιο συμβαίνει για την περιθώρια συνάρτηση της τ.μ. Y , η οποία εμφανίζεται στην τελευταία γραμμή του πίνακα. Έτσι, για παράδειγμα προσθέτοντας την δεύτερη στήλη των πιθανοτήτων έχουμε την $P(Y=1)=0,3875$.

Στο ίδιο παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(1,2)$. Από τον πίνακα έχουμε

$$\begin{aligned}
F(1,2) &= P(X\le 1, Y\le 2)\\
&= P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=2)\\
&+ P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)\\
&= 0,15+0,0,10+0,0875+0,10+0,175+0,1125=0,725.
\end{aligned}$$

3.Έστω η διακριτή διδιάστατη τ.μ. (X,Y) με από κοινού σ.π. που δίνεται από τον πίνακα

Πίνακας III

$Y\backslash X$	6	8	10	$f(y_s)$
1	0,2	0	0,2	0,4
2	0	0,2	0	0,2
3	0,2	0	0,2	0,4
$f(x_r)$	0,4	0,2	0,4	1

Παρατηρούμε ότι η τ.μ. X έχει πεδίο τιμών $R_X=\{6,7,8\}$ με αντίστοιχες πιθανότητες $P(X=6)=0,4, P(X=8)=0,2, P(X=10)=0,4$, το άθροισμα των οποίων είναι 1. Το ίδιο ισχύει για την τ.μ. Y που έχει πεδίο τιμών $R_Y=\{1,2,3\}$.Αν έχουμε την από κοινού σ.π., τότε μπορούμε να βρούμε την κατανομή των επιμέρους τ.μ. και προφανώς να υπολογίσουμε τις βασικές παραμέτρους τους, όπως είναι η μέση τιμή και η διασπορά. Για παράδειγμα, έχουμε για την τ.μ. X τα εξή:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 6P(X=6)+8P(X=8)+10P(X=10) \\
&= 6\times 0,4+8\times 0,2+10\times 0,4=8 \\
E(X^2) &= 6^2P(X=6)+8^2P(X=8)+10^2P(X=10) \\
&= 6^2\times 0,4+8^2\times 0,2+10^2\times 0,4=67,2 \\
V(X) &= E(X^2)-(E(X))^2=67,2-64=3,2, \text{ και } \sigma=1,788
\end{aligned}
$$

Όπως είναι φανερό η τυπική απόκλιση $\sigma = 1,788$ είναι μία αναμενόμενη τιμή. Υπενθυμίζουμε ότι η τυπική απόκλιση είναι ένα μέτρο που μας δείχνει πόσο διασκορπισμένες είναι οι τιμές της τ.μ. από τη μέση της τιμή, στην προκειμένη περίπτωση το 8. Ο αναγνώστης μπορεί να υπολογίσει τις αντίστοιχες παραμέτρους για την τ.μ. Y.

Ας θεωρήσουμε το εξής πρόβλημα στο παράδειγμα μας:Ποιά είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου $\{X = 10\}$ δεδομένου ότι έχει συμβεί το ενδεχόμενο $\{Y = 3\}$; Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε

$$P(X=10 \mid Y=3)=\frac{P((X=10,Y=3))}{P(Y=3)}=\frac{0,2}{0,4}=0,5$$

Όμοια έχουμε

$$P(X=6 \mid Y=3)=\frac{0,2}{0,4}=0,5 \text{ και } P(X=8 \mid Y=3)=\frac{0}{0,4}=0.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\sum_x P(X=x \mid Y=3)=1$$

που σημαίνει ότι η συνάρτηση $P(X = x \mid Y = 3), x = 6, 8, 10$ είναι συνάρτηση πιθανότητας.Το ίδιο συμβαίνει αν δεσμεύσουμε ως προς $Y = 1$ ή $Y = 2$ και αντίστοιχα ως προς X, π.χ. η συνάρτηση $P(Y = y \mid X = 6), y = 1, 2, 3,$ είναι σ.π., κ.λ.π. Γενικά, δίνουμε τον εξής ορισμό για τέτοιου είδους συναρτήσεις:

Ορισμός 3.5. *Έστω η διδιάστατη τ.μ. (X,Y) με από κοινού σ.π.* $f(x_r, y_s)$, $r, s = 0, 1, 2, \ldots$ *και περιθώριες σ.π.* $f_X(x_r), f_Y(y_s)$. *Η συνάρτηση*

$$f_{X|Y}(x_r \mid y_s)=\frac{f(x_r,y_s)}{f_Y(y_s)},\ r=0,1,\ldots,\ \mu\varepsilon\, f_Y(y_s)>0$$

καλείται η **δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας** *της τ.μ. X δεδομένης της τ.μ. Y. Όμοια ορίζεται η* **δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας** *της τ.μ. Y δεδομένης της τ.μ. X.*

Ορισμός 3.6. *Ισχύουν οι υποθέσεις του ορισμού 3.5.Η συνάρτηση*

$$F_{X|Y}(X \leq x \mid y_s) = P(X \leq x \mid y_s)$$

καλείται **δεσμευμένη αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας** *της τ.μ. X δεδομένης της τ.μ. Y.*

Συνεχίζοντας το προηγούμενο παράδειγμα, ας υπολογίσουμε την δεσμευμένη αθροιστική συνάρτηση της τ.μ. X δεδομένου ότι Y=3. Είναι

$$F_{X|Y}(x \mid Y=3) = \begin{cases} 0 & \forall\, x < 6 \\ 0,5 & \forall\, x < 10 \\ 1 & \forall\, x \geq 10 \end{cases}$$

Συμβολίζουμε με $X \mid Y$ την δεσμευμένη τ.μ. X δεδομένης της Y. Για τη μέση τιμή και διασπορά μιας τέτοιας τ.μ. έχουμε τον επόμενο ορισμό:

Ορισμός 3.7. *α) Η $E(X \mid Y)$ ορίζεται από τη σχέση*

$$E(X \mid Y) = \sum_{r=0}^{\infty} x_r P(X = x_r \mid Y = y_s),\ s = 0, 1, \ldots$$

και καλείται **δεσμευμένη μέση τιμή** *της τ.μ. X δεδομένης της τ.μ. Y.*

β) Η $V(X \mid Y)$ ορίζεται από τη σχέση

$$V(X \mid Y) = E(X^2 \mid Y) - [E(X \mid Y)]^2$$

και καλείται **δεσμευμένη διασπορά** *της τ.μ. X δεδομένης της τ.μ. Y. Η θετική τετραγωνική ρίζα της $V(X \mid Y)$ καλείται* **δεσμευμένη τυπική απόκλιση** *της τ.μ. X δεδομένης της τ.μ. Y και συνήθως συμβολίζεται με $\sigma_{X|Y}$.*

3.Στο παράδειγμα 2 για τη $E(X \mid Y)$ και $V(X \mid Y)$ έχουμε

$$\begin{aligned} E(X \mid Y=3) &= \sum_x x f_{X|Y}(x \mid Y=3) = \sum_x x \frac{f(x,3)}{f_Y(3)} \\ &= 6P(X=6 \mid Y=3) + 8P(X=8 \mid Y=3) + 10P(X=10 \mid Y=3) \\ &= 6 \times 0,5 + 8 \times 0 + 10 \times 0,5 = 8. \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό της $E(X^2 \mid Y)$ εφαρμόζοντας το θεώρημα 3 του κεφαλαίου 2 έχουμε

$$\begin{aligned} E(X^2 \mid Y=3) &= \sum_x x^2 f_{X|Y}(x \mid Y=3) = \sum_x x^2 \frac{f(x,3)}{f_Y(3)} \\ &= 6^2 P(X=6 \mid Y=3) + 8^2 P(X=8 \mid Y=3) + 10^2 P(X=10 \mid Y=3) \\ &= 36 \times 0,5 + 64 \times 0 + 100 \times 0,5 = 68. \end{aligned}$$

Άρα

$$V(X \mid Y) = E(X^2 \mid Y) - [E(X \mid Y)]^2 = 68 - 8^2 = 4$$

και η δεσμευμένη τυπική απόκλιση είναι $\sigma_{X|Y} = 2$.

Σημειώνουμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε ροπές κ τάξης περί το 0, $\kappa = 1, 2, \ldots$, καθώς και περί κάποια σταθερά, όπως είδαμε στη μελέτη μιας τυχαίας μεταβλητής. Οι ορισμοί είναι ανάλογοι και πάντα με την προυπόθεση ότι οι σειρές συγκλίνουν απόλυτα.

3.3 Συνεχείς Διδιάστατες Τυχαίες Μεταβλητές

Ορισμός 3.8. *Η διδιάστατη τ.μ. (X, Y) καλείται συνεχής διδιάστατη τ.μ. αν υπάρχει συνάρτηση $f(x, y)$ που είναι*

$$f(x,y) \geq 0 \; x, y \in R$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

και η από κοινού συνάρτηση κατανομής $F(x, y)$ δίνεται από τη σχέση

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(t,s)dtds.$$

Από την τελευταία σχέση έχουμε

$$P(\alpha < X \leq \beta, \gamma < Y \leq \delta) \; = \; \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\delta} f(x,y)dxdy$$

και για κάθε σημείο συνέχειας (x, y) της $F(x, y)$ ισχύει η σχέση

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Ορισμός 3.9. *Η συνάρτηση*

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

καλείται **περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** *της τ.μ. X.*

Αντίστοιχα, η συνάρτηση

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

καλείται **περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** *της τ.μ. Y.*

Οι συναρτήσεις $f_X(x), f_y(y)$ ικανοποιούν τις απαραίτητες συνθήκες για να είναι συναρτήσεις πυκνοτήτων πιθανοτήτων, δηλ., είναι μη αρνητικές και τα ολοκληρώματά τους ως προς x και ως προς y αντίστοιχα είναι ίσα με 1.

Ορισμός 3.10. *Η συνάρτηση*

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)},\ f_Y(y) > 0$$

καλείται δεσμευμένη σ.π.π. της τ.μ. X δεδομένης της τ.μ. Y.

Αντίστοιχα η συνάρτηση

$$f_{Y|X}(y|\chi) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)},\ f_X(x) > 0$$

καλείται δεσμευμένη σ.π.π. της τ.μ. Y δεδομένης της τ.μ. X.

Για τις βασικές παραμέτρους της δεσμευμένης τ.μ.$X|Y$ και ανάλογα για την $Y|X$ έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 3.11. *α) Η $E(X \mid Y)$ ορίζεται από τη σχέση*

$$E(X \mid Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)dx$$

και καλείται **δεσμευμένη μέση τιμή** *της τ.μ. X δεδομένης της τ.μ. Y.*

β) Η $V(X \mid Y)$ ορίζεται από τη σχέση

$$V(X \mid Y) = E(X^2 \mid Y) - [E(X \mid Y)]^2$$

και καλείται **δεσμευμένη διασπορά** *της τ.μ. X δεδομένης της τ.μ. Y. Η θετική τετραγωνική ρίζα της $V(X \mid Y)$ καλείται* **δεσμευμένη τυπική απόκλιση** *της τ.μ. X δεδομένης της τ.μ. Y και συνήθως συμβολίζεται με $\sigma_{X|Y}$.*

Τα παραδείγματα που ακολουθούν έχουν σκοπό να αποσαφηνίσουν τις παραπάνω έννοιες.

4. Έστω η συνεχής διδιάστατη τ.μ. (X,Y) με από κοινού σ.π.π.

$$f(x,y) = 4xy,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1.$$

Οι περιθώριες σ.π.π. $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ είναι

$$f_X(x) = \int_0^1 4xydy = 4x[y^2/2]_0^1 = 2x,\ 0 < x < 1$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 4xydx = 4y[x^2/2]_0^1 = 2y,\ 0 < y < 1.$$

Η από κοινού α.σ.κ. είναι

$$\begin{aligned} F(x,y) &= 0,\ \forall x < 0,\ y \in (0,1),\ y < 0,\ x \in (0,1) \\ F(x,y) &= \int_0^x \int_0^y 4tsdtds = \int_0^x 4t[s^2/2]_0^y = \int_0^x 2y^2tdt = x^2y^2,\ \forall x,y \in (0,1) \\ F(x,y) &= 1,\ \forall x,y \geq 1. \end{aligned}$$

Οι δεσμευμένες σ.π.π. είναι

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f(x,y)}{f_Y} = \frac{4xy}{2y} = 2x,\ 0 < x < 1 \\ f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f(x,y)}{f_X} = \frac{4xy}{2x} = 2y,\ 0 < y < 1 \end{aligned}$$

Για τις βασικές παραμέτρους της $X|Y$, δηλ., τη $E(X|Y)$ και $V(X|Y)$ έχουμε

$$E(X|Y) = \int_0^1 x2xdx = \frac{2}{3}, E(X^2|Y) = \int_0^1 x^2 2xdx = \frac{1}{2}, V(X|Y) = \frac{1}{2} - [\frac{2}{3}]^2 = \frac{1}{18}.$$

Παρατηρούμε ότι $E(X|Y) = E(X)$ και $V(X|Y) = V(X)$

Ας υπολογίσουμε τις εξής πιθανότητες: $P(X > 1/3, Y \leq 1/2), P(X > Y)$

$$\begin{aligned} P(X > 1/3, Y \leq 1/2) &= \int_{1/3}^1 \int_0^{1/2} 4xydydx \\ &= \int_{1/3}^1 4x[y^2/2]_0^{1/2} = \int_{1/3}^1 (x/2)dx = [x^2/4]_{1/3}^1 = 8/36. \\ P(X > Y) &= \int_0^1 \int_y^1 4xydxdy = \int_0^1 4y[x^2/2]_y^1 \\ &= \int_0^1 (2y - 2y^2)dy = 1/2. \end{aligned}$$

Είναι προφανές ότι στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήξουμε αν θεωρήσουμε την ολοκλήρωση ως εξής

$$P(X > Y) = \int_0^1 \int_0^x 4xydydx = 1/2,$$

τιμή η οποία είναι αναμενόμενη αν σκεφτούμε ότι η (X,Y) παίρνει τιμές στο τετράγωνο με κορυφές τα σημεία (0.0), (1,0), (1,1), (0,1) και ζητάμε το εμβαδόν του χωρίου πάνω από την διαγώνιο από το (0,0) στο (1,1).

5.Έστω η διδιάστατη τ.μ. (X,Y) με από κοινού σ.π.π.

$$f(x, y) = \frac{1}{2}xy,\ 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x.$$

Οι περιθώριες σ.π.π. είναι

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^x \frac{1}{2}xydy = \frac{1}{4}x^3,\ 0 \leq x \leq 2 \\ f_Y(y) &= \int_y^2 \frac{1}{2}xydx = \frac{y}{4}(4-y^2),\ 0 \leq y \leq 2 \end{aligned}$$

Οι δεσμευμένες σ.π.π. είναι

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{2}xy}{\frac{y}{4}(4-y^2)} = \frac{2x}{4-y^2},\ y \leq x \leq 2 \\ f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{2}xy}{\frac{x^3}{4}} = \frac{2y}{x^2},\ 0 \leq y \leq x. \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί στις τιμές που μπορεί να πάρει η τ.μ. X (ή Y) όταν δίνεται η τιμή της Y (ή X).

Οι $E(X|Y)$ και $V(X|Y)$ είναι

$$\begin{aligned} E(X|Y) &= \int_y 2x\frac{2x}{4-y^2}dx = \frac{2}{3}(y + \frac{4}{2+y}) \\ E(X^2|Y) &= \int_y 2x^2\frac{2x}{4-y^2}dx = \frac{16-y^4}{2(4-y^2)} \\ V(X|Y) &= \frac{16-y^4}{2(4-y^2)} - [\frac{2}{3}(y + \frac{4}{2+y})]^2. \end{aligned}$$

Ο υπολογισμός της από κοινού σ.π.π. F(x,y) είναι αρκετά πολύπλοκος γιατί οι τ.μ. X, Y είναι εξαρτημένες και αυτό μας δημιουργεί τη δυσκολία. Ο σκοπός αυτών των σημειώσεων μας αποτρέπει στο να αναλύσουμε αυτήν την περίπτωση, ωστόσο για να δώσουμε μία ιδέα πως συμπεριφέρονται τ.μ. τέτοιου τύπου παρουσιάζουμε μόνο αυτήν την περίπτωση.

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_0^y \int_0^t \frac{1}{2} tsdsdt + \int_0^y \int_y^x \frac{1}{2} tsdtds \\
&= \frac{y^2(2x^2-y^2)}{16}\ 0 \le x < 2,\ 0 \le y \le x \\
F(x,y) &= \int_0^x \int_0^t \frac{1}{2} tsdsd = \frac{x^4}{16},\ 0 \le x < 2,\ y > x \\
F(x,y) &= \int_0^y \int_0^t \frac{1}{2} tsdsdt + \int_0^y \int_y^2 \frac{1}{2} tsdtds \\
&= \frac{y^2(8-y^2)}{16},\ x \ge 2,\ 0 \le y < 2 \\
F(x,y) &= 0,\ \forall x < 0, \forall y \text{ και } y < 0, \forall x, \\
F(x,y) &= 1,\ \forall x > 2, \forall y > 2
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \lim_{y\to\infty} F(x,y) = \frac{x^4}{16},\ 0 \le x \le 2 \\
F_Y(y) &= \lim_{x\to\infty} F(x,y) = \frac{y^2(8-y^2)}{16},\ 0 \le y \le 2
\end{aligned}$$

Ο αναγνώστης μπορεί να υπολογίσει τις τελευταίες περιθώριες α.σ.κ. χρησιμοποιώντας τις περιθώριες σ.π.π. που υπολογίσαμε στην αρχή του παραδείγματος.

6. Έστω η διδιάστατη τ.μ. (X,Y) με από κοινού σ.π.π. $f(x,y) = 1$, $0 \le y \le 2x \le 2$, δηλ., η (X,Y) κατανέμεται ομοιόμορφα στο τρίγωνο με κορυφές (0.0), (1,0), (1,2) που έχει εμβαδόν 1. Οι περιθώριες σ.π.π. είναι

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^{2x} 1dy = 2x,\ 0 \le x \le 1, \\
f_Y(y) &= \int_{y/2}^1 1dx = 1 - y/2,\ 0 \le y \le 2.
\end{aligned}$$

Οι δεσμευμένες σ.π.π. είναι

$$
\begin{aligned}
f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{1-y/2} = \frac{2}{2-y},\ y/2 \le x \le 1 \\
f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{2x},\ 0 \le y \le 2x.
\end{aligned}
$$

και η δεσμευμένη μέση τιμή της X—Y είναι

$$E(X|Y) = \int_{y/2}^{1} x\frac{2}{2-y}dx = \frac{1}{2} + \frac{y}{4},$$

ενώ η δεσμευμένη μέση τιμή της $Y|X$ είναι

$$E(Y|X) = \int_0^{2x} y\frac{1}{2x}dy = x.$$

7. Έστω η διδιάστατη τ.μ. (X,Y) με από κοινού σ.π.π.

$$f(x,y) = 2e^{-x}e^{-2y},\ 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty$$

Οι περιθώριες σ.π.π. είναι

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^\infty 2e^{-x}e^{-2y}dy = e^{-x}\int_0^\infty 2e^{-2y}dy = e^{-x},\ 0 < x < \infty \\
f_Y(y) &= \int_0^\infty 2e^{-x}e^{-2y}dx = 2e^{-2y}\int_0^\infty e^{-x}dx = 2e^{-2y},\ 0 < y < \infty.
\end{aligned}
$$

Στα παραδείγματα 4 και 7 παρατηρούμε ότι $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, ενώ στα άλλα παραδείγματα δεν συμβαίνει. Η τελευταία σχέση σημαίνει ανεξαρτησία μεταξύ των δύο τ.μ. X, Y. Έχουμε τον εξής ορισμό για την περίπτωση της ανεξαρτησίας:

Ορισμός 3.12. *Οι τ.μ. X, Y καλούνται ανεξάρτητες αν $\forall A, B \in \mathcal{B}$ ισχύει η σχέση*

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Πιο απλά, οι X, Y είναι ανεξάρτητες αν τα ενδεχόμενα $\{X \in A\}, \{Y \in B\}$ είναι ανεξάρτητα.

Θεώρημα 3.2. *Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες*
1. Οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες
2. Ισχύει η σχέση

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y), \; \forall x, y \in R.$$

3.΄Εστω οι διακριτές τ.μ. X, Y με από κοινού σ.π. $f(x_r, y_s)$ *και περιθώριες σ.π.* $f_X(x_r), f_Y(y_s)\; r, s = 0, 1, \ldots$. *Οι X, Y είναι ανεξάρτητες αν*

$$f(x_r, y_s) = f_X(x_r)f_Y(y_s) \quad \forall x_r, y_s.$$

4.΄ΕΣτω οι συνεχείς τ.μ. X, Y με από κοινού σ.π.π. f(x,y)και περιθώριες σ.π.π. $f_X(x), f_Y(y),\; x, y \in R$. *Οι X, Y είναι ανεξάρτητες αν*

$$f(x, y) = f_X(x), f_Y(y), \; x, y \in R.$$

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια των προηγούμενων ορισμών. Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε A το διάστημα $(-\infty, x]$ και B το $(-\infty, y]$ η 1. συνεπάγεται την 2. κ.λ.π. .

Από τους ορισμούς 3.12, 3.5 και 3.10 έχουμε ότι

$$f_{X|Y}(x_r \mid y_s) = \frac{f(x_r, y_s)}{f_Y(y_s)} = f_X(x_r), \; r = 0, 1, \ldots, \text{ με } f_Y(y_s) > 0$$

$$f_{Y|X}(y_s|x_r) = \frac{f(x_r, y_s)}{f_X(x_r)} = f_Y(y_s), \; s = 0, 1, \ldots, \text{ με } f_X(x_r) > 0.$$

΄Ομοια έχουμε

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = f_X(x), \; f_Y(y) > 0$$

$$f_{Y|X}(y|\chi) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = f_Y(y), \; f_X(x) > 0.$$

3.4 Συνδιακύμανση-Συντελεστής Συσχέτισης

Στη μελέτη της διδιάστατης τ.μ. (X, Y) σημαντικό ρόλο παίζουν τα μέτρα που ορίζουμε στη συνέχεια.

Ορισμός 3.13. *α) Το μέτρο*

$$E[(X-\mu_X)^2(Y-\mu_Y)^2]$$

καλείται **συνδιακύμανση** *(Covariance) των τ.μ. X,Y και συμβολίζεται με Cov(X,Y). Με* μ_X, μ_Y *συμβολίζουμε τη μέση τιμή της X και Y αντίστοιχα.*
β) Το μέτρο

$$\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

καλείται **συντελεστής συσχέτισης** *(corellation coefficient) των τ.μ. X,Y και συμβολίζεται με* $\rho(x,y)$. *Με* σ_X, σ_Y *συμβολίζουμε την τυπική απόκλιση της τ.μ. X και Y αντίστοιχα.*

Η Cov(X,Y) υπάρχει αν υπάρχουν οι μέσες τιμές.

Οι βασικές ιδιότητες της συνδιακύμανσης δύο τ.μ. είναι οι ακόλουθες:

$$I_1: \quad Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$
$$I_2: \quad \text{Αν} \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta, \in R, \text{ τότε}$$
$$Cov(\alpha X+\beta, \gamma Y+\delta) = \alpha\gamma Cov(X,Y).$$
$$I_3: \quad Cov(X, Y+Z) = Cov(X,Y) + Cov(X,Z).$$

Η απόδειξη των παραπάνω ιδιοτήτων είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της συνδιακύμανσης. Για τον υπολογισμό της χρησιμοποιούμε συνήθως τον τύπο που δίνεται από την I_1. Σημειώνουμε ότι

$$E(XY) = \begin{cases} \sum_{x_r}\sum_{y_s} x_r y_s f(x_r,y_s) & \text{, αν (X,Y) είναι διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy & \text{, αν (X,Y) είναι συνεχής} \end{cases}$$

Αν οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες, τότε

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_X(x)f_Y(y)dxdy \\ &= [\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx][\int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy] = E(X)E(Y). \end{aligned}$$

Με βάση την τελευταία σχέση και την I_1 έχουμε το εξής πόρισμα:

Πόρισμα 3.1. Αν οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες, τότε η συνδιακύμανσή τους είναι μηδέν.

Ορισμός 3.14. *Οι τ.μ.* X, Y *καλούνται ασυσχέτιστες αν* $Cov(X, Y) = 0$.

Σημειώνουμε ότι αν οι τ.μ. X, Y **είναι ανεξάρτητες, τότε είναι και ασυσχέτιστες. Το αντίστροφο δεν ισχύει.**

Πόρισμα 3.2. Έστω οι τ.μ. X, Y, οι οποίες έχουν πεπερασμένες ροπές δεύτερης τάξης $E(X^2), E(Y^2)$. Ισχύει η σχέση

$$V(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 V(X) + \beta^2 V(Y) + 2\alpha\beta Cov(X, Y)$$

για $\alpha, \beta \in R$ σταθερές. Αν οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες, τότε

$$V(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 V(X) + \beta^2 V(Y).$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό της διασποράς και τις ιδιότητες της έχουμε

$$\begin{aligned} V(\alpha X + \beta Y) &= E\{[(\alpha X + \beta Y) - E(\alpha X + \beta Y)]^2\} \\ &= E\{[\alpha(X - \mu_X) + \beta(Y - \mu_Y]^2\} \\ &= \alpha^2 E[(X - \mu_X)^2] + \beta^2 E[(Y - \mu_Y)^2] + 2\alpha\beta E[(X - \mu_\chi)(Y - \mu_Y)] \\ &= \alpha^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2\alpha\beta Cov(x, y) \end{aligned}$$

Αν οι τ.μ. X,Y είναι ανεξάρτητες, τότε $Cov(x, Y) = 0$ και άρα ισχύει η δεύτερη σχέση.

Σημειώνουμε ότι οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν για τ.μ.$X_1, \ldots, X_n$ και είναι:

$$V(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 V(X_k) + 2 \sum \sum_{1 \leq k < l \leq n} \alpha_k \alpha_l Cov(X_k, X_l)$$

Αν οι τ.μ.$X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες, τότε

$$V(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 V(X_k).$$

Οι βασικές ιδιότητες του συντελεστή συσχέτισης $\rho(X, Y)$ είναι οι ακόλουθες:

$$I_1 : \quad \rho(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) = \begin{cases} \rho(X, Y) & \text{αν } \alpha\gamma > 0 \\ -\rho(X, Y) & \text{αν } \alpha\gamma < 0. \end{cases}$$

$$I_2 : \quad -1 \leq \rho(X, Y) \leq 1.$$

Παρατήρηση

Η Cov(X,Y) είναι ένα μέτρο που μας δείχνει τη σχέση που υπάρχει μεταξύ των δύο μεταβλητών. Συνήθως χρησιμοποιείται ο συντελεστής συσχέτισης που είναι ένα μέτρο ανεξάρτητο μονάδων και δηλώνει το βαθμό της γραμμικότητας που υπάρχει μεταξύ των τ.μ. X,Y. Πιο αναλυτικά έχουμε τα εξής:

α) Αν $\rho = 0$, τότε οι τ.μ. είναι ασυσχέτιστες

β) Αν $\rho > 0$, τότε οι τ.μ. είναι θετικά συσχετισμένες, δηλ., όσο αυξάνονται οι τιμές της τ.μ. X τόσο αυξάνονται και οι τιμές της Y. Για παράδειγμα, αν X είναι το ύψος των φοιτητριών της Σχολής Θετικών Επιστημών και Y το βάρος τους, τότε για μεγάλες τιμές της X αναμένουμε μεγάλες τιμές της Y και αντίστροφα.

γ) Αν $\rho < 0$, τότε οι τ.μ. είναι αρνητικά συσχετισμένες, δηλ. όσο αυξάνονται οι τιμές της τ.μ. X τόσο ελαττώνονται οι τιμές της τ.μ. Y. Για παράδειγμα, αν X είναι ο ρυθμός επενδύσεων και Y η ανεργία, τότε όσο αυξάνεται ο ρυθμός επενδύσεων, τόσο ελαττώνεται η ανεργία.

δ Αν $\rho = +1$ ή $\rho = -1$, τότε υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ των τ.μ. X και Y. Το επόμενο θεώρημα αφορά στην περίπτωση αυτή.

Θεώρημα 3.3. *Αν $\rho(X,Y) = \pm 1$, τότε με πιθανότητα 1 ισχύει η γραμμική σχέση $Y = \alpha X + \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και αντίστροφα.*
Ειδικότερα, αν $\rho = 1$, τότε

$$Y = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} X + (\mu_Y - \mu_X \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}).$$

Αν $\rho = -1$, τότε

$$Y = -\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} X + (\mu_Y + \mu_X \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}).$$

Στην περίπτωση που $|\rho| < 1$ η γραμμική σχέση δεν ισχύει, αλλά συνήθως επιθυμούμε να προσδιορίσουμε μία προσέγγιση της τ.μ. Y συναρτήσει της τ.μ. X. Προφανώς στην προσπάθεια μας αυτή πραγματοποιείται ένα λάθος, έστω ε, που είναι τυχαία μεταβλητή με $E(\varepsilon) = 0$ δηλ. έχουμε

$$Y = \alpha X + \beta + \varepsilon.$$

Για να είναι καλή η προσέγγιση πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα που γίνεται, το οποίο σημαίνει ότι πρέπει να υπολογίσουμε τα $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ που είναι τέτοια ώστε το μέτρο

$$E(\varepsilon^2) = E[(Y - \hat{\alpha}X - \hat{\beta})^2]$$

να ελαχιστοποιείται.

Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή ως **"αρχή ελαχίστων τετραγώνων"**.

Παραλείποντας την απόδειξη παραθέτουμε τις ακόλουθες τιμές για τα $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ που μας κατοχυρώνουν την παραπάνω συνθήκη.

$$\hat{\alpha} = \rho(X, Y)\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

και

$$\hat{\beta} = \mu_Y - \rho(X, Y)\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\mu_X$$

Ορισμός 3.15. *Έστω η διδιάστατη τ.μ. (X, Y) με πεπερασμένες ροπές δεύτερης τάξης $E(X^2), E(Y^2)$. Η ευθεία*

$$y = \mu_Y + \rho(X, Y)\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$$

καλείται **ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της τ.μ. Y στη X**.

Αντίστοιχα, η ευθεία

$$x = \mu_X + \rho(X, Y)\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y)$$

καλείται **ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της τ.μ.X στην Y**.

Με βάση τα $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ έχουμε για το μέσο τετραγωνικό σφάλμα

$$E(\varepsilon^2) = E[(Y - \hat{\alpha}X - \hat{\beta})^2] = \sigma_Y^2(1 - \rho^2(X, Y))$$

το οποίο καλείται **υπόλοιπο διασποράς**.

Αντίστοιχα έχουμε

$$E(\varepsilon^2) = E[(X - \hat{\alpha}Y - \hat{\beta})^2] = \sigma_X^2(1 - \rho^2(X, Y)).$$

Το επόμενο θεώρημα είναι ιδιαίτερα χρήσιμο.

Θεώρημα 3.4. *Έστω μία διδιάστατη τ.μ. (X, Y) με πεπερασμένες ροπές δεύτερης τάξης $E(X^2), E(Y^2)$. Τότε υπάρχουν οι δεσμευμένες μέσες τιμές $E(X|Y)$ και $E(Y|X)$ και ικανοποιούν τις σχέσεις*

$$\min_{\xi \in \Xi} E[(X - \xi(Y))^2] = E(X - E(X|Y))^2,$$

όπου Ξ το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων $\xi(Y)$ με $E(\xi(Y)^2) < \infty$, και

$$\min_{\theta \in \Theta} E[(Y - \theta(X))^2] = E(Y - E(Y|X))^2,$$

όπου Θ το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων $\theta(X)$ με $E(\theta(X)^2) < \infty$.

Με απλά λόγια, το θεώρημα λέει ότι αν υπολογίσουμε την $E(X \mid Y)$ και είναι ευθεία, τότε αυτή η ευθεία είναι η ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της X στην Y και αντίστοιχα αν υπολογίσουμε την $E(Y \mid X)$ και είναι ευθεία, τότε αυτή είναι η ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της Y στη X. Είναι δυνατό η μία να είναι ευθεία και η άλλη όχι. Στην περίπτωση που δεν είναι, τότε προχωρούμε στον υπολογισμό της ευθείας, όπως αυτή προσδιορίζεται από τα $\hat{\beta}, \hat{\beta}$ που αναφέραμε παραπάνω.

8. Συνέχεια του παραδείγματος 5. Θα υπολογίσουμε την $E(X \mid Y)$ και αν δεν είναι ευθεία θα προσδιορίσουμε την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της X στην Y. Είναι

$$E(X|Y) = \int_y^2 x \frac{2x}{4 - y^2} dx = \frac{2}{3}(y + \frac{4}{2 + y}),$$

η οποία δεν είναι ευθεία, άρα πρέπει να υπολογίσουμε τα $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$, τα οποία θα μας προσδιορίσουν την ευθεία γραμμική παλινδρόμησης της X στην Y. Για τον προσδιορισμό τους απαιτείται ο υπολογισμός των μέτρων τα οποία υπεισέρχονται στους αντίστοιχους τύπους. Έχουμε

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^2 x\frac{\chi^3}{4}dx = 1,60 \\
E(X^2) &= \int_0^2 x^2\frac{\chi^3}{4}dx = 2,66 \\
V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = 0,53, \sigma_X = 0,73 \\
E(Y) &= \int_0^2 y\frac{y}{4}(4-y^2)dy = 1,06 \\
E(Y^2 &= \int_0^2 y^2\frac{y}{4}(4-y^2)dy = 1,33 \\
V(Y) &= E(YX^2) - [E(Y)]^2 = 0,196, \sigma_Y = 0,44 \\
E(XY) &= \int_0^2 \int_0^x xy\frac{xy}{2}dydx = 1,78 \\
\text{και άρα} & \\
Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = 1,78 - 1,60 \times 1,06 = 0,084 \text{ και} \\
\rho(X,Y) &= \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 0,22.
\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις

$$\hat{\alpha} = \rho(X,Y)\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}, \hat{\beta} = \mu_X - \rho(X,Y)\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\mu_Y,$$

και τους παραπάνω υπολογισμούς έχουμε $\hat{\alpha} = 0,36$ και $\hat{\beta} = 2,82$. Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι

$$x = 0,36y + 2,82 \text{ και το υπόλοιπο διασποράς } 0,53(1-0,22^2) = 0,50$$

Παρατηρούμε ότι $V(X) = 0,53$ είναι μεγαλύτερη από το υπόλοιπο διασποράς 0,50, το οποίο είναι αναμενόμενο, αφού έχουμε κάποια πληροφορία για την τ.μ. X από την τ.μ. Y.

Ο αναγνώστης παροτρύνεται να υπολογίσει την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της Y στη X.

9. Συνέχεια του παραδείγματος 6. Οι δεσμευμένες μέσες τιμές είναι

$$E(X|Y) = \int_{y/2}^1 x\frac{2}{2-y}dx = \frac{1}{2} + \frac{y}{4}$$

και

$$E(Y|X) = \int_0^{2x} y\frac{1}{2x}dy = x$$

Παρατηρούμε ότι και οι δύο είναι ευθείες, άρα συμπίπτουν με τις ευθείες γραμμικής παλινδρόμησης και άρα έχουμε

$$x = \frac{1}{2} + \frac{y}{4} \quad \text{και} \quad y = x.$$

Ο αναγνώστης παροτρύνεται να υπολογίσει όλα τα μέτρα που προσδιορίζουν τα α, β και να επαληθεύσει τις παραπάνω ευθείες.

10. Συνέχεια του παραδείγματος 7. Στο παράδειγμα 6 παρατηρούμε ότι

$$f(x,y) = 2e^{-x}e^{-2y} = f_X(x)f_Y(y) = e^{-x}2e^{-2y}\; 0 < x < \infty,\; 0 < y < \infty,$$

το οποίο σημαίνει ότι οι τ.μ. είναι ανεξάρτητες, άρα ασυσχέτιστες, δηλ. $\rho(X,Y) = 0$. Είναι

$$f_{X|Y} = f_X = e^{-x},\; 0 < x < \infty,$$

δηλ., η τ.μ. $X|Y$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή, όπως και η X με παράμετρο $\lambda = 1$, άρα $E(X|Y) = E(X) = \frac{1}{\lambda} = 1$. Επίσης η τ.μ. $Y|X$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή, όπως και η Y με παράμετρο $\lambda = 2$, άρα $E(Y|X) = E(Y) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$.

11. Έστω η διακριτή διδιάστατη τ.μ. (X,Y) με από κοινού σ.π. που δίνεται από τον πίνακα

Πίνακας ΙΙΙ

Y X	1	2	3	4	5	$f(y_s)$
1	1/12	1/24	0	1/24	1/30	1/5
2	1/24	1/24	1/24	1/24	1/30	1/5
3	1/12	1/24	1/24	0	1/30	1/5
4	1/12	0	1/24	1/24	1/30	1/5
5	1/24	1/24	1/24	1/24	1/30	1/5
$f_(x_r)$	1/3	1/6	1/6	1/6	1/6	1

Οι τ.μ. X,Y δεν είναι ανεξάρτητες, αφού για παράδειγμα, $f(1,1) = 1/12 \neq f_X(1)f_Y(1) = 1/5 \times 1/3 = 1/15$. Ας υπολογίσουμε τις δεσμευμένες μέσες τιμές $E(Y|X_i), i = 1,2,3,4,5$. Είναι

$$\begin{aligned} E(Y|X=1) &= \sum_{j=1}^{5} y_j \frac{f(1,y_j)}{f_X(1)} = \frac{1}{f_X(1)} \sum_{j=1}^{5} y_j f(1,y_j) \\ &= \frac{1}{1/3}(1 \times 1/12 + 2 \times 1/24 + 3 \times 1/12 + 4 \times 1/12 + 5 \times 1/24) \\ &= 2,875 \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε τις υπόλοιπες και έχουμε τελικά τα σημεία:

$$(x, E(Y|X=x)) = \{(1,\ 2,875), (2,\ 2,75), (3,\ 3,5), (4,\ 3), (5,\ 3)\}.$$

Τα σημεία αυτά δεν σχηματίζουν ευθεία. Άρα για να προσδιορίσουμε την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της Y στη X πρέπει να υπολογίσουμε τα $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$. Η ευθεία είναι

$$y = 3 + 0,056(x - 2,66)$$

Ο αναγνώστης παροτρύνεται να υπολογίσει τα μέτρα $E(X), E(X^2), V(X), E(Y), E(Y^2), V(Y), E(XY), Cov(X,Y), \rho(X,Y)$. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_x \sum_y xyf(x,y) = 1 \times 1 \times 1/12 + 1 \times 2 \times 1/24 + 1 \times 3 \times 0 \\ &+ 1 \times 4 \times 1/24 + 1 \times 5 \times 1/30 + 2 \times 1 \times 1/24 + 2 \times 2 \times 1/24 \\ &+ 2 \times 3 \times 1/24 + \ldots + 5 \times 5 \times 1/30 = 8,125. \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times 1/3 + 2 \times 1/6 + 3 \times 1/6 + 4 \times 1/6 + 5 \times 1/6 = 16/6 \\ E(X^2) &= 1^2 \times 1/3 + 2^2 \times 1/6 + 3^2 \times 1/6 + 4^2 \times 1/6 + 5^2 \times 1/6 = 56/6. \\ V(X) &= 56/6 - (16/6)^2 = 2,22 \text{ και } \sigma_X = 1,49. \end{aligned}$$

Για περαιτέρω εξάσκηση προτείνεται στον αναγνώστη να επαληθεύσει τα σημεία:

$$(y, E(X|Y=y)) = \{(1,\ 2,5), (2,\ 2,91), (3,\ 2,29), (4,\ 2,70), (5,\ 2,91)\}$$

και να προσδιορίσει την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της X στην Y.

12. Ας θεωρήσουμε το παράδειγμα 2. Παρατηρούμε ότι οι τ.μ. δεν είναι ανεξάρτητες, αφού για παράδειγμα

$$f(x,y) = f(6,1) = 0,2 \neq f_X(6)f_Y(1) = 0,4 \times 0,4 = 0,16.$$

Υπενθυμίζουμε ότι η σχέση $f(x_r, y_s) = f_X(x_r)f_Y(y_s)$ πρέπει να ισχύει για όλα τα (x_r, y_s)

Ας προσδιορίσουμε το συντελεστή συσχέτισης για να δούμε ποιά σχέση υπάρχει μεταξύ τους. Είναι

$$\begin{aligned} E(XY) &= (1 \times 6)0,2 + (1 \times 10)0,2 + (2 \times 8)0,2 + (3 \times 6)0,2 \\ &+ (3 \times 10)0,2 = 16 \\ E(X) &= 6 \times 0,4 + 8 \times 0,2 + 10 \times 0,4 = 8 \\ E(Y) &= 1 \times 0,4 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,4 = 2 \quad \text{και} \\ Cov(X,Y) &= 16 - 8 \times 2 = 0. \end{aligned}$$

Επομένως οι τ.μ. X,Y είναι ασυσχέτιστες και $\rho(X, Y) = 0$.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε δύο πολύ σημαντικές διδιάστατες κατανομές για τη μελέτη των οποίων χρησιμοποιούμε όλη τη θεωρία του παρόντος κεφαλαίου.

Πολυωνυμική Κατανομή

Έστω μία ακολουθία ανεξαρτήτων δοκιμών που σε κάθε μία μπορεί να συμβεί ένα και μόνο ένα από τα ενδεχόμενα

$$A_1, \ldots, A_\kappa, A, \text{ όπου } A = (A_1 \cup \ldots \cup A_\kappa)'$$

με πιθανότητες

$$p_1, \ldots, p_\kappa \quad \text{και} \quad q = 1 - (p_1 + \ldots + p_\kappa)$$

αντίστοιχα. Έστω ν ανεξάρτητες δοκιμές του παραπάνω πειράματος και $X_1, \ldots, X_\kappa$ ο αριθμός εμφανίσεων των $A_1, \ldots, A_\kappa$ αντίστοιχα.

Ορισμός 3.16. *Η κ-διάστατη τ.μ. $(X_1, \ldots, X_\kappa)$ με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας που δίνεται από τη σχέση*

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_\kappa = x_\kappa) = \frac{\nu!}{x_1! \ldots, x_\kappa! x_{\kappa+1}!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_\kappa^{x_\kappa} q^{x_{\kappa+1}},$$

όπου $x_{\kappa+1} = \nu - (x_1 + \ldots + x_\kappa)$ ακολουθεί την **Πολυωνυμική κατανομή**.

Για να αποδείξουμε την παραπάνω σχέση χρησιμοποιούμε ανάλογο σκεπτικό με εκείνο για τη Διωνυμική κατανομή, αφού αν θεωρήσουμε μόνο ένα ενδεχόμενο το A_1, τότε έχουμε την τ.μ. X_1 που ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή. Επομένως η από κοινού κατανομή των $X_1, \ldots, X_\kappa$ είναι μία γενίκευση της Διωνυμικής. Η γενίκευση αυτή καλείται **Πολυωνυμική κατανομή**. Σημειώνουμε ότι η $X_{\kappa+1}$ δεν είναι τ.μ., αφού αν γνωρίζουμε τις τιμές των πρώτων κ τ.μ. η τιμή της είναι συγκεκριμένη.

Για να απλοποιήσουμε την υπολογιστική διαδικασία, ας θεωρήσουμε $\kappa = 2$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μία **Τριωνυμική κατανομή**, την οποία θα μελετήσουμε.

Η από κοινού σ.π. των τ.μ. X_1, X_2 είναι

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \frac{\nu!}{x_1!x_2!x_3!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} q^{x_3}$$

όπου $x_3 = \nu - x_1 - x_2$, $q = 1 - p_1 - p_2$.

Για τις περιθώριες συναρτήσεις πιθανοτήτων έχουμε

$$\begin{aligned}
P(X_1 = x_1) &= \sum_{x_2} \frac{\nu!}{x_1!x_2!(\nu - x_1 - x_2)!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} q^{\nu - x_1 - x_2} \\
&= \frac{\nu!}{x_1!(\nu - x_1)!} p_1^{x_1} (1 - p_1)^{\nu - x_1} \\
&\times \sum_{x_2} \frac{(\nu - x_1)!}{x_2!(\nu - x_1 - x_2)!} (\frac{p_2}{1 - p_1})^{x_2} (\frac{q}{1 - p_1})^{\nu - x_1 - x_2} \\
&= \frac{\nu!}{x_1!(\nu - x_1)!} p_1^{x_1} (1 - p_1)^{\nu - x_1} \sum_{x_2} b(x_2, (\nu - x_1), \frac{p_2}{1 - p_1}) \\
&= \frac{\nu!}{x_1!(\nu - x_1)!} p_1^{x_1} (1 - p_1)^{\nu - x_1},
\end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι η περιθώρια σ.π. της τ.μ. X είναι μία Διωνυμική με παραμέτρους (ν, p_1). Σημειώνουμε ότι το τελευταίο άθροισμα είναι ίσο με 1, αφού είναι το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων μιας Διωνυμικής με παραμέτρους $(\nu - x_1), \frac{p_2}{1 - p_1}$.

Όμοια έχουμε ότι η περιθώρια σ.π. της τ.μ. Y είναι μία Διωνυμική με παραμέτρους (ν, p_2).

Η δεσμευμένη σ.π. της X_1 δεδομένης της X_2 είναι

$$\begin{aligned}
P(X_1 = x_1 | X_2 = x_2) &= \frac{\frac{\nu!}{x_1!x_2!x_3!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} q^{x_3}}{\frac{\nu!}{x_2!(\nu - x_2)!} p_2^{x_2} (1 - p_2)^{\nu - x_2}} \\
&= \frac{(\nu - x_2)!}{x_1!(\nu - x_2 - x_1)!} (\frac{p_1}{1 - p_2})^{x_1} (\frac{q}{1 - p_2})^{\nu - x_2 - x_1} \\
&= b(x_1, \nu - x_2, \frac{p_1}{1 - p_2}),\ x_1 = 0, 1, \ldots \nu - x_2.
\end{aligned}$$

δηλ., είναι μία Διωνυμική με παραμέτρους $(\nu - x_2, \frac{p_1}{1 - p_2})$ και επομένως η δεσμευμένη μέση τιμή είναι

$$E(X_1 | X_2 = x_2) = (\nu - x_2) \frac{p_1}{1 - p_2},\ x_2 = 0, 1, \ldots, \nu.$$

Όμοια έχουμε για τη δεσμευμένη σ.π. της τ.μ. $X_2|X_1$

$$P(X_2 = x_2|X_1 = x_1) = b(x_2, \nu - x_1, \frac{p_2}{1-p_1}),\ x_2 = 0, 1, \ldots \nu - x_1$$

και άρα

$$E(X_2|X_1 = x_1) = (\nu - x_1)\frac{p_2}{1-p_1},\ x_1 = 0, 1, \ldots, \nu.$$

Παρατηρούμε ότι και οι δύο δεσμευμένες μέσες τιμής είναι γραμμικές, επομένως συμπίπτουν με τις ευθείες γραμμικής παλινδρόμησης.

Για να το επιβεβαιώσουμε,ας υπολογίσουμε το συντελεστή συσχέτισης:

$$\begin{aligned} E(X_1X_2) &= \sum_{x_1}\sum_{x_2} x_1x_2\frac{\nu!}{x_1!x_2!x_3!}p_1^{x_1}p_2^{x_2}q^{x_3} \\ &= \nu(\nu-1)p_1p_2 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \rho(X_1, X_2) &= \frac{\nu(\nu-1)p_1p_2 - (\nu p_1)(\nu p_2)}{\sqrt{\nu p_1(1-p_1)}\sqrt{\nu p_2(1-p_2)}} \\ &= -\sqrt{\frac{p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής συσχέτισης είναι αρνητικός, το οποίο είναι αναμενόμενο, αφού όσο περισσότερες φορές εμφανίζεται το ενδεχόμενο A_1 στα ν πειράματα, τόσο λιγότερες φορές εμφανιζεται το ενδεχόμενο A_2. Οι περαιτέρω υπολογισμοί για τις ευθείες γραμμικής παλινδρόμησης επαφίονται στον αναγνώστη.

13. Έστω 10 ρίψεις ενός ζαριού , X_1 ο αριθμός εμφανίσεων της ένδειξης 1 και X_2 ο αριθμός εμφανίσεων της ένδειξης 6. Η διδιάστατη τ.μ. (X_1, X_2) ακολουθεί την Τριωνυμική κατανομή με παραμέτρους $\nu = 10, p_1 = p_2 = 1/6, q = 4/6$. Εφαρμόζοντας τους παραπάνω τύπους μπορούμε να υπολογίσουμε ό,τι επιθυμούμε. Για παράδειγμα ο συντελεστής συσχέτισης είναι

$$\rho(X_1, X_2) = -\sqrt{\frac{p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}} = -\sqrt{\frac{(1/6)(1/6)}{(5/6)(5/6)}} = -1/5.$$

Διδιάστατη Κανονική Κατανομή

Ορισμός 3.17. Ορισμός 3.17. *Η διδιάστατη τ.μ. (X,Y) με από κοινού σ.π.π.*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \\ &\times \ \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X})^2 - 2\rho(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X})(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}) + (\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y})^2]\right\}, \\ & -\infty < x < \infty \quad -\infty < y < \infty, \end{aligned}$$

όπου $\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho(X,Y)$ είναι οι μέσες τιμές, οι τυπικές αποκλίσεις και ο συντελεστής συσχέτισης των τ.μ. X, Y, ακολουθεί τη **Διδιάστατη Κανονική κατανομή**.

Μετά από αρκετές πράξεις καταλήγουμε στα εξής αποτελέσματα που αφορούν στις περιθώριες και δεσμευμένες σ.π.π. των τ.μ. X, Y:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\exp\{-\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}\}, \ -\infty < x < \infty$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y}\exp\{-\frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}\}, \ -\infty < y < \infty.$$

Όπως είναι φανερό οι περιθώριες σ.π.π. είναι Κανονικές κατανομές.

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_X}\exp\left\{-\frac{x-(\mu_Y+\varrho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y))^2}{2\sigma_X^2(1-\rho^2)}\right\}, \\ f_{Y|X}(y|x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_Y}\exp\left\{-\frac{y-(\mu_X+\varrho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X))^2}{2\sigma_Y^2(1-\rho^2)}\right\} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η $X|Y$ κατανέμεται ως Κανονική κατανομή με παραμέτρους

$$E(X|Y) = \mu_Y + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y))$$

και

$$V(X|Y) = \sigma_X^2(1-\rho^2).$$

Αντίστοιχα έχουμε για την $Y|X$ ότι κατανέμεται ως Κανονική κατανομή με παραμέτρους

$$E(Y|X) = \mu_X + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X))$$

και

$$V(Y|X) = \sigma_Y^2(1-\rho^2).$$

Παρατηρήσεις:

1.Είναι αξιοσημείωτο ότι οι $E(X|Y)$ και $E(Y|X)$ είναι ευθείες και άρα συμπίπτουν με τις ευθείες γραμμικής παλινδρόμησης της X στην Y και της Y στη X. Επίσης, ότι οι δεσμευμένες διασπορές, όπως είναι αναμενόμενο, είναι τα υπόλοιπα διασποράς.

2. Στην περίπτωση που $\rho = 0$, δηλ. οι τ.μ. X, Y είναι ασυσχέτιστες, τότε είναι

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

που σημαίνει ότι οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες. Υπενθυμίζουμε ότι αν οι τ.μ. είναι ανεξάρτητες, τότε είναι και ασυσχέτιστες και οτι το αντίστροφο δεν ισχύει. **Μοναδική εξαίρεση είναι η διδιάστατη Κανονική κατανομή**.

3. Η κ-διάστατη Κανονική κατανομή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη Στατιστική. Παραπέμπουμε στη σχετική βιβλιογραφία για τον ορισμό της, ο οποίος είναι γενίκευση της διδιάστατης που αναπτύξαμε.

Δίνουμε ένα παράδειγμα για να γίνει σαφές πως συμπεριφέρονται οι δεσμευμένες σ.π.π. χρησιμοποιώντας όσα γνωρίζουμε από την Κανονική και Τυποποιημένη Κανονική κατανομή.

15. Έστω μία διδιάστατη Κανονική τ.μ. (X,Y) με $\mu_X = 20, \sigma_X = 2, \mu_Y = 30, \sigma_Y = 3$ και $\rho = 0,5$. Ας υπολογίσουμε τις πιθανότητες

$$P(29,77 < X < 33,23|Y = 32) \text{ και } P(24,82 < Y < 35,18|X = 23)$$

Γνωρίζουμε ότι η $X|Y \sim N(30+0,5\frac{3}{2}(32-30),\, 4(1-0,25)) = N(31,5, 3)$. Άρα τυποποιώντας έχουμε

$$\begin{aligned} P(29,77 < \ & X < 33,23|Y = 32) \\ &= P(\frac{29,77-31}{1,73} < \frac{X-31,5}{1,73} < \frac{33,23-31,5}{1,73}) \\ &= P(-1,73 < Z < 1,73) = \Phi(1,73) - \Phi(-1,73) \\ &= 2\Phi(1,73) - 1 = 2 \times 0,68 - 1 = 0,36. \end{aligned}$$

Η δεύτερη πιθανότητα υπολογίζεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο.

3.5 Κατανομή συναρτήσεων διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής

΄Οπως αναφέραμε στην αρχή αυτού του κεφαλαίου πολλές φορές ενδιαφερόμαστε για τον προσδιορισμό της κατανομής τ.χ που είναι συναρτήσεις μιας διδιάστατης τ.μ, όπως π.χ. Z=X+Y, Z=X-Y, Z=XY, Z=X/Y, $Z = max\{X, Y\}$, $Z = min\{X, Y\}$, καθώς και πολυπλοκότερων μορφών που έχουν ενδιαφέρον σε συγκεκριμένες εφαρμογές. Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με το θέμα αυτό και κυρίως στην περίπτωση που έχουμε μία συνεχή διδιάστατη τ.μ (X, Y). Υπάρχουν διάφοροι τρόποι προσέγγισης αυτών των προβλημάτων. Το θεώρημα που ακολουθεί μας επιτρέπει μια άμεση αντιμετώπιση τέτοιου είδους προβλημάτων, αν φυσικά ισχύουν κάποιες συνθήκες, για το λόγο αυτό θα αποτελέσει την κύρια αποδεικτική διαδικασία.

Θεώρημα 3.5. *Έστω η διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X, Y) με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x, y)$ και έστω οι συναρτήσεις*

$$Z = g(X, Y), \quad W = h(X, Y)$$

που ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

α) Ο μετασχηματισμός $(x, y) \to (z, w)$ είναι 1-1.

β) Οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial w}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς.

Τότε η (Z, W) είναι μία συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή και η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών Z, W, έστω $f(z, w)$, δίνεται από τη σχέση

$$f(z, w) = f(g^*(z, w), h^*(z, w))|J(z, w)|, \tag{3.1}$$

όπου g^*, h^* είναι οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί και $J(z, w)$ η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού $(x, y) \to (z, w)$

$$J(z, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ & \\ \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Σκιαγράφηση της απόδειξης: Σύμφωνα με τον ορισμό της από κοινού αθροιστικής συνάρτησης έχουμε

$$\begin{aligned} F(z, w) &= P(Z \leq, z\, W \leq w) = P(g(X, Y) \leq z,\ h(Z, W) \leq w) \\ &= \int\int_{R(z,w)} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{w} g^*(u, v) h^*(u, v) |J| du dv \end{aligned}$$

Από την τελευτάια σχέση λαμβάνοντας τις μερικές παραγώγους ως προς z και w έχουμε το αποτέλεσμα του θεωρήματος.

Παραδείγματα

16. Έστω $Z = Z + Y$ και $W = Z$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα έχουμε άμεσα ότι

$$f(z, w) = f(w, z - w)| - 1|$$

Η τ.μ Z είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα για πολλές εφαρμογές. Από την τελευταία σχέση μπορούμε να πάρουμε ένα γενικό τύπο που μας δίνει την κατανομή του αθροίσματος δύο τυχαίων μεταβλητών που ικανοποιούν τις συνθήκες του θεωρήματος. Είναι

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z, w)dw = \int_{-\infty}^{\infty} f(w, z - w)dw. \tag{3.2}$$

Αν οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες, τότε η τελευταία σχέση γράφεται

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(w) f_Y(z - w)dw. \tag{3.3}$$

Η $f_Z(z)$ καλείται **συνέλιξη** των συναρτήσεων f_X, f_Y και συνήθως γράφεται $f_Z = f_X * f_Y$. Η συνέλιξη έχει τις εξής ιδιότητες:$f_X * f_Y = f_Y * f_X$, $f_X * (f_Y * f_Z) = f_X * f_Y) * f_Z$.

Ας θεωρήσουμε τη συνέλιξη δύο ανεξαρτήτων Τυποποιημένων Κανονικών $N(0, 1)$. Σύμφωνα με την τελευταία σχέση έχουμε

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{w^2}{2}\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{(z-w)^2}{2}\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-(w - \frac{z}{2})^2\} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{z^2}{4}\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\{-\frac{z^2}{4}\}, \end{aligned}$$

η οποία σημαίνει ότι η συνέλιξη ακολουθεί την Κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά το άθροισμα των διασπορών, δηλ. $Z \sim N(0, 2)$. Αυτό δεν είναι περιστασιακό. Ισχύει γενικά η εξής πολύ ισχυρή ιδιότητα της Κανονικής κατανομής.

Πόρισμα: Αν οι τ.μ. $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, \ldots, \nu$ και είναι ανεξάρτητες , τότε η τ.μ.

$$Z = X_1 + \ldots + X_\nu$$

ακολουθεί την Κανονική κατανομή με μέση τιμή το άθροισμα των μέσων τιμών και διασπορά το άθροισμα των διασπορών, δηλ. $Z \sim N(\sum_{i=1}^{\nu} \mu_i, \quad \sum_{i=1}^{\nu} \sigma_i^2)$.

Η ιδιότητα αυτή της Κανονικής καλείται **αναπαραγωγική**. Την ιδιότητα αυτή έχουν και οι εξής άλλες κατανομές:
Αν $X_i \sim b(r_i, p), i = 1, \ldots, \nu$ και ανεξάρτητες, τότε η $Z = X_1 + \ldots + X_\nu$ ακολουθεί επίσης τη Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $r = r_1 + \ldots + r_\nu$, p.
Αν $X_i \sim$ Poisson$(\lambda_i), i = 1, \ldots, \nu$ και είναι ανεξάρτητες, τότε $Z \sim$ Poisson$(\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_\nu$.
Αν $X_i \sim$ Γάμμα$(\alpha_i, \lambda), i = 1, \ldots, \nu$ και είναι ανεξάρτητες, τότε $Z \sim$ Γάμμα$(\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu,\ \lambda)$.

Σε αντιδιαστολή με τις παραπάνω κατανομές ας θεωρήσουμε το άθροισμα δύο ομοιομόρφων στο διάστημα $[0, 1]$ και ανεξαρτήτων. Σύμφωνα με το γενικό τύπο είναι

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(w) f_Y(z - w) dw = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx.$$

Για να αντικαταστήσουμε τις f_X f_Y με 1 (δηλ. την σ.π.π. της ομοιομόρφου στο διάστημα [0, 1]) πρέπει να απαιτήσουμε να ισχύουν τα: $0 \leq x \leq 1$ και $0 \leq z - x \leq 1$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $0 \leq z \leq 2$ οι προηγούμενες συνθήκες μας δίνουν τα εξής: Αν $0 \leq z \leq 1$, τότε $0 \leq x \leq z$ και αν $1 \leq z \leq 2$, τότε $z - 1 \leq x \leq 1$, τα οποία μας δίνουν

$$f_Z(z) = \int_0^z dx = z, \quad 0 \leq z \leq 1$$

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^1 dx = 2 - z, \quad 1 \leq z \leq 2.$$

Η μορφή αυτή της σ.π.π. καλείται τριγωνική από τη γραφική της παράσταση. Η τελευταία εφαρμογή δείχνει ότι πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί στα όρια ολοκλήρωσης.

Δίνουμε άλλο ένα παράδειγμα συνέλιξης ανεξαρτήτων εκθετικών πυκνοτήτων με $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}$, $0 < x, y < \infty$. Είναι

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(w) f_Y(z - w) dw = f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx.$$

και για να αντικαταστήσουμε τις γνωστές μας σ.π.π. πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι $0 < z - x < \infty$, δηλ. $0 < x < z$. Άρα το τελευταίο ολοκλήρωμα γράφεται

$$f_Z(z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)} dx = \lambda z e^{-\lambda z}.$$

Παρατηρούμε ότι η σ.π.π. της τ.μ. Z είναι η Γάμμα ($\alpha = 2, \lambda$). Επαγωγικά μπορούμε να δείξουμε ότι αν $X_i, i = 1, \ldots, \nu$ ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ και είναι ανεξάρτητες, τότε η τ.μ. $Z = X_1 + \ldots + X_\nu$ ακολουθεί την κατανομή Γάμμα ($\alpha = \nu, \lambda$). Στην περίπτωση αυτή η Γάμμα κατανομή καλείται κατανομή Erlang.

17. Έστω η διδιάστατη τυχαία μεταβλητή (Z, W) που ορίζεται από τις σχέσεις $Z = g(X,Y) = \frac{X}{Y}$ και $W = h(X,Y) = X$. Οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί είναι $g^*(z,w) = zw$ $h^*(z,w) = w$ και η Ιακωβιανή ορίζουσα

$$J(z,w) = \begin{vmatrix} w & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = w.$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα 3 έχουμε για την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των Z, W

$$f(z,w) = f(zw,w)|w|.$$

Η τ.μ. Z που μας ενδιαφέρει έχει σ.π.π.

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(zw,w)|w|dw$$

και αν οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες, τότε

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(zw) f_W(w)|w|dw. \tag{3.4}$$

Ας εφαρμόσουμε την τελευταία σχέση στην περίπτωση που οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες εκθετικές με παράμετρο λ. Είναι

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda z w} \lambda e^{-\lambda w} |w| dw \\ &= \lambda^2 \int_0^{\infty} e^{-(\lambda z + \lambda)} w dw \\ &= \frac{\lambda^2}{(\lambda z + \lambda)^2}, \quad z > 0. \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση που αφορά την κατανομή πηλίκου τυχαίων μεταβλητών προσδιορίζονται οι κατανομές των επόμενων τυχαίων μεταβλητών που είναι ιδιαίτερα σημαντικές στη στατιστική. Στον ορισμό τους εμφανίζεται η τυποποιημένη Κανονική κατανομή καθώς και η χ-τετράγωνο για υπενθύμιση των οποίων παραπέμπουμε στο δεύτερο κεφάλαιο.

Κατανομή t ή Κατανομή Student

Έστω η τ.μ. $Z \sim N(0,1)$ και η χ^2_ν ανεξάρτητες. Η τυχαία μεταβλητή που ορίζεται από τη σχέση

$$t_\nu = \frac{Z}{\sqrt{\chi^2_\nu/\nu}}$$

έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \frac{1}{(1+\frac{t^2}{\nu})^{\frac{\nu+1}{2}}}, \; -\infty < t < \infty$$

Η t_ν ακολουθεί την κατανομή t ή κατανομή Student με ν βαθμούς ελευθερίας.

Η κατανομή t προσδιορίστηκε για πρώτη φορά από τον W. S. Gosset ο οποίος τη δημοσίευσε με το ψευδώνυμο Student. Για το λόγο αυτό είναι γνωστή ως κατανομή Student. Λόγω της σημαντικότητας της κατανομής υπάρχουν πίνακες που μας δίνουν τιμές της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής για διάφορα σημεία καθώς και τιμές του ν (βλ. Πίνακα VI του Παραρτήματος).

Κατανομή F

Αν $\chi^2_{\nu_1}$ και $\chi^2_{\nu_2}$ ανεξάρτητες χ-τετράγωνο τυχαίες μεταβλητές με ν_1 και ν_2 βαθμούς ελευθερίας αντίστοιχα, τότε η τυχαία μεταβλητή

$$W = \frac{\chi^2_{\nu_1}/\nu_1}{\chi^2_{\nu_2}/\nu_2}$$

ακολουθεί την κατανομή F με ν_1 και ν_2 βαθμούς ελευθερίας. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της είναι

$$f(w) = \frac{\Gamma[\nu_1+\nu_2)/2]}{\Gamma(\nu_1/2)\Gamma(\nu_2/2)} \frac{(\nu_1/\nu_2)^{\nu_1/2} w^{(\nu_1/2)-1}}{(1+\nu_1 w/\nu_2)^{(\nu_1+\nu_2)/2}}, \quad -\infty < w < \infty.$$

Η κατανομή ονομάστηκε F για πρώτη φορά από τον G. Snedecor προς τιμή του R. A. Fisher, ο οποίος χρησιμοποίησε διάφορες τροποποιήσεις του λόγου των χ-τετραγώνων για εφαρμογές στη στατιστική. Σχετικοί πίνακες που μας δίνουν τιμές της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής για διάφορους βαθμούς ελευθερίας χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές της κατανομής F (βλ. Πινακες VIII, IX και X του Παραρτήματος).

3.6 Ασκήσεις

1. Έστω το παράδειγμα 1. Είναι οι τ.μ. X, Y ανεξάρτητες; Αν δεν είναι, να υπολογισθεί ο συντελεστής συσχέτισης $\rho(X,Y)$. Επίσης, οι $E(X|Y=i), i = 0,1,2,3$, καθώς και η ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της τ.μ. X στην τ.μ. Y.

2. Έστω η ρίψη 2 αμερόληπτων και διακεκριμένων ζαριών. Η τ.μ. X είναι η ένδειξη του πρώτου ζαριού και η τ.μ. Y η μικρότερη από τις δύο ενδείξεις. Να προσδιορισθεί η από κοινού σ.π. των τ.μ. X,Y. Είναι ανεξάρτητες οι δύο τ.μ.; Αν όχι, τότε να υπολογισθεί ο συντελεστής συσχέτισης $\rho(X,Y)$ και να προσδιορισθεί η $E(Y|X=\varkappa), \varkappa = 1,2,3,4,5,6$. Ποιά είναι η ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της τ.μ Y στη τ.μ. X;

3. Έστω ότι οι τ.μ. X,Y και Z είναι ανεξάρτητες τ.μ. Poisson με παραμέτρους $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ αντίστοιχα. Να υπολογισθεί ο συντελεστής συσχέτισης των τ.μ. $U = X+Y, V = Y+Z$. Αν οι τ.μ. X, Y και Z είναι ανεξάρτητες ομοιόμορφες στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε ποιός είναι ο συντελεστής συσχέτισης $\rho(U,V)$;

4. Έστω η διακριτή διδιάστατη τ.μ. (X,Y) με από κοινού σ.π.

$$f(x,y) = \frac{x+y-2}{c}, \quad x = 1,2 \quad y = 1,2$$

Να προσδιορισθεί η σταθερά c για να είναι η $f(x,y)$ συνάρτηση πιθανότητας. Να καταγραφούν οι πιθανότητες σε μορφή πίνακα, καθώς και οι περιθώριες σ.π..Να υπολογισθεί ο συντελεστής συσχέτισης και να προσδιορισθεί η ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της τ.μ. Y στην τ.μ. X.

5. Μία κάλπη περιέχει 4 άσπρες και 6 μαύρες σφαίρες. Εκλέγονται τυχαία δύο δείγματα μεγέθους 3 και 5 σφαιρών αντίστοιχα από την κάλπη και έστω X ο αριθμός των άσπρων σφαιρών στο πρώτο δείγμα και Y ο αριθμός των άσπρων σφαιρών στο δεύτερο δείγμα. Να προσδιορισθεί η από κοινού σ.π. των τ.μ. X, Y, οι περιθώριες σ.π., η $E(X|Y=i), i = 1,2,3,4$, καθώς και ο συντελεστής συσχέτισης $\rho(X,Y)$.

6. Έστω ότι η από κοινού σ.π.π. των τ.μ. X,Y είναι

$$f(x,y) = \frac{1}{y}e^{-y}, \quad 0 < x < y, \quad 0 < y < \infty.$$

Να προσδιορισθούν α)οι περιθώριες σ.π.π. $f_X(x), f_Y(y)$, β)οι δεσμευμένες σ.π.π. $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|\chi)$, γ)$E(X|Y), E(Y|X)$, δ)ο συντελεστής συσχέτισης ε) οι ευθείες γραμμικής παλινδρόμησης της X στην Y και της Y στη X.

7.΄Εστω ότι η από κοινού σ.π.π. των τ.μ. X,Y δίνεται από τον τύπο

$$f(x,y) = 8xy, \quad 0 \leq x \leq y \leq 1.$$

Να υπολογισθούν α) οι περιθώριες σ.π.π. $f_X(x), f_Y(y)$, β) οι δεσμευμένες σ.π.π. $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$, γ) οι $E(X|Y), E(Y|X)$, δ) ο συντελεστής συσχέτισης και ε)οι ευθείες γραμμικής παλινδρόμησης της X στην Y και της Y στη X.

8.΄Εστω ότι η από κοινού σ.π.π. των τ.μ. X,Y δίνεται από τον τύπο

$$f(x,y) = 2(x + y - 2xy), \quad 0 \leq x \leq 1, \leq y \leq 1.$$

α)Να προσδιορισθεί η από κοινού αθροιστική σ.κ. $F(x,y)$. β)οι περιθώριες σ.π.π. $f_X(x), f_Y(y)$, γ)οι δεσμευμένες σ.π.π. $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x), E(X|Y), E(Y|X)$ και δ)ο συντελεστής συσχέτισης $\rho(X, Y)$.

9.΄Εστω ότι η από κοινού σ.π.π. των τ.μ. X,Y δίνεται από τον τύπο

$$f(x,y) = 1, \quad -y < x < y, \quad 0 < y < 1.$$

α) Να υπολογισθούν οι περιθώριες σ.π.π. $f_X(x), f_Y(y)$, β)οι δεσμευμένες σ.π.π. $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$, γ)οι $E(X|Y), E(Y|X)$, δ)να δειχθεί ότι οι τ.μ. X,Y είναι ασυσχέτιστες.

10.΄Εστω ότι η από κοινού σ.π.π. των τ.μ. X,Y δίνεται από τον τύπο

$$f(x,y) = \frac{1}{x}, \quad 0 \leq y \leq x \leq 1.$$

α) Να προσδιορισθεί η περιθώρια σ.π.π. $f_X(x)$ β) η δεσμευμένη σ.π.π.$f_{Y|X}(y|x)$, και γ) η δεσμευμένη μέση τιμή $E(Y|X)$.

11. ΄Εστω η διδιάστατη τυχαία μεταβλητή $X, Y)'$ με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4xy}}, \quad 0 < x \leq 1, \quad 0 < y \leq x.$$

Να υπολογισθούν οι δεσμευμένες μέσες τιμές $E(X|Y)$, $E(Y|X)$, η γραμμική παλινδρόμηση της X στην Y και της Y στη X, καθώς και τα μέσα τετραγωνικά σφάλματα.

12. Ο παρακάτω πίνακας δίνει την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας της διακριτής διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής $X, Y)'$

$Y \backslash X$	6	8	10	$f(y_s)$
1	0,2	0	0,2	
2	0	0,2	0	
3	0,2	0	0,2	
$f(x_r)$				1

Να υπολογισθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανοτήτων $f(x_r), f(y_s)$, καθώς και τα μέτρα $E(X), E(Y), V(X), V(Y), Cov(X,Y), \rho(X,Y), E(X|Y=3), V(X|Y=3)$.

13. Έστω η συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή $X,Y)'$ με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} exp\{-\frac{x^2 - 2xy + 2y^2}{2}, \quad -\infty < x,\ y < \infty.$$

Να δειχθεί ότι ο συντελεστής συσχέτισης είναι $\rho(X,Y) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Επίσης να δειχθεί ότι $E(X|Y) = y$ και $E(Y|X) = \frac{x}{2}$.

14. Οι τυχαίες μεταβλητές X, Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x,y) = \alpha\beta e^{-(\alpha x + \beta y)}, \quad x, y > 0, \alpha, \beta > 0(\text{σταθερές}.$$

Να δειχθεί ότι οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες.

15. Θεωρείστε τη ρίψη δύο διακεκριμένων και αμερόληπτων ζαριών. Να προσδιορισθεί η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών X, Y όπου:
α) X είναι η μεγαλύτερη ένδειξη και Y το άθροισμα των ενδείξεων.
β) X είναι η ένδειξη του πρώτου ζαριού και Y η μεγαλύτερη ένδειξη.
γ) X είναι η μικρότερη ένδειξη και Y η μεγαλύτερη.

16. Οι τυχαίες μεταβλητές X, Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x,y) = \frac{6}{7}(x^2 + \frac{xy}{2}), \quad 0 < x < 1,\ 0 < y < 2.$$

α) Να ελεγχθεί ότι η $f(x,y)$ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.
β) Να προσδιορισθεί η περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x)$.
γ)Να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(X > Y), \quad P(Y > 1/2|X < 1/2)$.

Κεφάλαιο 4

Ανισότητες-Συγκλίσεις- Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

4.1 Ανισότητες-Συγκλίσεις

Στα προηγούμενα κεφάλαια είδαμε ότι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής ή η από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής αν έχουμε δύο η περισσότερες μεταβλητές μας δίνει όλες τις πληροφορίες για την τυχαία μεταβλητή ή τις τυχαίες μεταβλητές, που σημαίνει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε πιθανότητες ενδεχομένων που μας ενδιαφέρουν. Επίσης μέτρα (αριθμοί), όπως η μέση τιμή και διασπορά ή και άλλες ροπές, αν υπάρχουν, μας δίνουν σημαντικές πληροφορίες για την συμπεριφορά της τ.μ. ή των τ.μ.

Στην περίπτωση που γνωρίζουμε μόνο τη μέση τιμή και διασπορά μπορούμε να έχουμε πληροφορία για την κατανομή της τ.μ. ή των τ.μ., η οποία βασίζεται σε ανισότητες που μας παρέχουν φράγματα για πιθανότητες ενδεχομένων και σε οριακά θεωρήματα. Σημειώνουμε ότι τα πιο σημαντικά θεωρητικά συμπεράσματα στη θεωρία πιθανοτήτων είναι οριακά θεωρήματα. Πρωτεύοντα ρόλο παίζει "Ο Νόμος των Μεγάλων Αριθμών" και "Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα". Για τις αποδείξεις τους σημαντικό ρόλο έχουν συγκεκριμένες ανισότητες τις οποίες αναφέρουμε στη συνέχεια.

Γενικά, στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσίασουμε μερικά βασικά από τα αποτελέσματα του τύπου που αναφέραμε χωρίς αποδείξεις και θα προσπαθήσουμε να αναδείξουμε την πρακτική τους σημασία.

Ανισότητα Markov

Έστω η τ.μ. X, η οποία παίρνει μόνο θετικές τιμές. Τότε για κάθε σταθερά $\alpha > 0$ ισχύει η ανισότητα

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}. \tag{4.1}$$

Απόδειξη:΄Εστω ότι η τ.μ. X είναι συνεχής με σ.π.π. $f(x)$. Είναι

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty xf(x)dx = \int_0^\alpha xf(x)dx + \int_\alpha^\infty xf(x)dx \\ &\geq \int_\alpha^\infty xf(x)dx \geq \int_\alpha^\infty \alpha f(x)dx \\ &= \alpha \int_\alpha^\infty f(x)dx = \alpha P(X \geq \alpha). \end{aligned}$$

Ανισότητα Chebyshev

΄Εστω η τ.μ. X με πεπερασμένη μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Τότε για κάθε $\kappa > 0$ ισχύει η ανισότητα

$$P(|X-\mu|) \geq \kappa) \leq \frac{\sigma^2}{\kappa^2}. \tag{4.2}$$

Απόδειξη: Αφού $(X-\mu)^2$ είναι μία μή αρνητική τ.μ. μπορούμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα Markov με $\alpha = \kappa^2$. ΄Εχουμε

$$P(|X-\mu|) \geq \kappa) = P[(X-\mu)^2 \geq \kappa^2] \leq \frac{E(X-\mu)^2}{\kappa^2} = \frac{\sigma^2}{\kappa^2}.$$

Πολλές φορές η ανισότητα Chebyshev συναντάται στις ακόλουθες μορφές:

$$P(|X-\mu| \geq \kappa\sigma) \leq \frac{1}{\kappa^2}$$

και

$$P(|X-\mu| \leq \kappa\sigma) \geq 1 - \frac{1}{\kappa^2}.$$

Μία σημαντική εφαρμογή της ανισότητας Chebyshev είναι το εξής πόρισμα:

Πόρισμα 4.1. ΄Εστω η τ.μ X με E(X) και $V(X) = 0$. Τότε

$$P(X = E(X)) = 1.$$

Το πόρισμα λέει ότι αν η διασπορά μιας τ.μ. X είναι μηδέν, τότε η τ.μ. παίρνει μόνο μία τιμή που είναι και η μέση τιμή της. Στην περίπτωση αυτή η X είναι μία εκφυλισμένη τυχαία μεταβλητή.

Παραδείγματα

1. ΄Εστω ότι ο μέσος χρόνος συνεχούς λειτουργίας ενός μηχανήματος είναι 1000 ώρες. Ποια είναι η πιθανότητα το μηχάνημα να λειτουργήσει συνεχώς περισσότερο από 1100 ώρες που απαιτεί μία συγκεκριμένη εργασία;

Εστω X ο χρόνος συνεχούς λειτουργίας του μηχανήματος. Δεν γνωρίζουμε την σ.π.π. της τ.μ. X και επομένως δεν μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς την πιθανότητα. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Markov έχουμε

$$P(X > 1100) \leq \frac{1000}{1100} = 0,90$$

Με την ανισότητα Markov έχουμε την πληροφορία ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου $\{X > 1100\}$ είναι μικρότερη από 0.90.

2. Έστω η τ.μ. X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0,10). Ποια είναι η ακριβής τιμή της πιθανότητας $P(|X-5|>4)$ και ποια πληροφορία μας δίνει η ανισότητα Chebyshev;

Η ακριβής τιμή είναι

$$\begin{aligned} P(|X-5|>4) &= 1-P(|X-5|\leq 4) = 1-P(-4<X-5<4) \\ &= 1-P(1<X<9) = 1-\int_1^9 \frac{1}{10}dx = 1-8/10 = 0,20. \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι E(X)=10/2=5 και $V(X) = \sigma^2 = 25/3$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Chebyshev έχουμε το εξής άνω φράγμα για την πιθανότητα που ζητάμε

$$P(|X-5|>4) \leq \frac{25/3}{16} = 0,52.$$

Στοχαστική Σύγκλιση

Ας θεωρήσουμε το εξής παράδειγμα για να προσεγγίσουμε την έννοια της στοχαστικής σύγκλισης (βλ. Fisz (1963)):
Έστω η τ.μ. Y_ν που παίρνει τις τιμές $\{0, \frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}, \ldots, \frac{\nu-1}{\nu}, 1\}$ με πιθανότητες

$$P(Y_\nu = \frac{r}{\nu}) = \binom{\nu}{r}\frac{1}{2^\nu},\ r = 0, 1, \ldots, \nu.$$

Έστω τώρα η τ.μ. που ορίζεται ως εξής:

$$X_\nu \ = \ Y_\nu - \frac{1}{2}.$$

Η τ.μ. X_ν παίρνει τις τιμές $\{-\frac{1}{2}, \frac{2-\nu}{2\nu}, \ldots, \frac{1}{2}\}$ με πιθανότητες

$$P(X_\nu = \frac{r}{\nu} - \frac{1}{2}) = \binom{\nu}{r}\frac{1}{2^\nu} \quad r = 0, 1, \ldots, \nu.$$

Για $\nu = 2$ οι τιμές της τ.μ. X_2 είναι

$$\{-0,5, \quad 0, \quad 0,5\}$$

με αντίστοιχες πιθανότητες

$$0,25, \quad 0,5, \quad 0,25.$$

Έστω $\varepsilon = 0,3$. Έχουμε

$$P(|X_2| > 0,3) \;=\; 0,25 + 0,25 \;=\; 0,5.$$

Για $\nu = 5$ οι τιμές της τ.μ. X_5 είναι

$$\{-0,5, \quad -0,3, \quad -0,1, \quad 0,1, \quad 0,3, \quad 0,5\}$$

με αντίστοιχες πιθανότητες

$$1/32, \quad 5/32, \quad 10/32, \quad 10/32, \quad 5/32, \quad 1/32$$

και

$$P(|X_5| > 0,3) \;=\; 0,0625$$

Για $\nu = 10$ οι τιμές της τ.μ. X_{10} είναι

$$\{-0,5, \quad -0,4, \quad -0,3, \quad 0,2, \quad -0,1, \quad 0,1, \quad 0,2, \quad 0,3, \quad 0,4, \quad 0,5\}$$

με αντίστοιχες πιθανότητες

$$\begin{array}{lllll} \{ & 1/1024, & 10/1024, & 45/1024, & 120/1024, \quad 120/1024, \\ & 210/1024, & 210/1024, & 252/1024, & 210/1024, \ldots\} \end{array}$$

και

$$P(|X_{10}| > 0,3) \;=\; 0,02.$$

Παρατηρούμε ότι καθώς το ν μεγαλώνει η πιθανότητα μικραίνει για σταθερό ε και για $\nu \to \infty$ η πιθανότητα τείνει στο μηδέν. Είμαστε έτοιμοι να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 4.1. *Η ακολουθία των τ.μ. $\{X_\nu\}$ συγκλίνει στοχαστικά στο μηδέν αν για κάθε ε ισχύει η σχέση*

$$\lim_{\nu \to \infty} P(|X_\nu| > \varepsilon) \;=\; 0.$$

Παρατήρηση: Αν η $\{X_\nu\}$ συγκλίνει στοχαστικά στο μηδέν αυτό **δεν σημαίνει** ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, $\exists \nu_0 : \forall \nu > \nu_0$ ισχύει η σχέση $|X_\nu| < \varepsilon$. Από τον ορισμό έχουμε ότι **η πιθανότητα του ενδεχομένου** $\{|X_\nu| < \varepsilon\}$ **τείνει στο μηδέν καθώς** $\nu \to \infty$.

Ορισμός 4.2. *Η ακολουθία των τ.μ. $\{X_\nu\}$ συγκλίνει στοχαστικά (ή κατά πιθανότητα) στην τ.μ. X όταν $\nu \to \infty$ αν για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ ισχύει ότι*

$$\lim_{\nu\to\infty} P(|X_\nu - X| \le \varepsilon) \;=\; 1,$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{\nu\to\infty} P(|X_\nu - X| > \varepsilon) \;=\; 0.$$

Συνήθως γράφουμε $X_\nu \xrightarrow{P} X$. Το γράμμα "P" προέρχεται από τη λέξη "probability" που σημαίνει πιθανότητα.

Ορισμός 4.3. *Η ακολουθία των τ.μ. $\{X_\nu\}$ συγκλίνει* **κατά κατανομή ή κατά Νόμο** *στην τ.μ. X αν η ακολουθία των αθροιστικών συναρτήσεων κατανομής $\{F_\nu(x)\}$ συγκλίνει στην αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ καθώς $\nu \to \infty$, δηλ.,*

$$\lim_{\nu\to\infty} F_\nu(x) \;=\; F(x),$$

για κάθε $x \in R$ που η $F(x)$ είναι συνεχής.

Συνήθως γράφουμε $X_\nu \xrightarrow{N} X$.

Ορισμός 4.4. *Η ακολουθία των τ.μ. $\{X_\nu\}$ συγκλίνει* **με πιθανότητα 1 ή σχεδόν βέβαια** *στην τ.μ. X, δηλ.,*

$$P(\lim_{\nu\to\infty} X_\nu = X) \;=\; 1$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει η σχέση

$$\lim_{\nu\to\infty} P(|X_\kappa - X| \ge \varepsilon \;\; \text{για ένα τουλ.} \kappa \ge \nu) \;=\; 0.$$

Συνήθως γράφουμε $X_\nu \xrightarrow{\sigma.\beta} X$.

Παρατήρηση: Από τις παραπάνω συγκλίσεις η τελευταία είναι η ισχυρότερη.

Στο σημείο αυτό είναι απαραίτητο να δώσουμε τους εξής ορισμούς που αφορούν σε τυχαίο δείγμα από κατανομή:

Ορισμός 4.5. *Οι τ.μ $X_1, \ldots, X_\nu$ αποτελούν* **τυχαίο δείγμα** *μεγέθους ν από την κατανομή $F_X(x)$ της τ.μ. X, αν έχουν την ίδια κατανομή με την τ.μ. X και είναι ανεξάρτητες, δηλ., η από κοινού α.σ.κ. τους δίνεται από τη σχέση*

$$\begin{aligned} F_{X_1,\ldots,X_\nu}(x_1,\ldots,x_\nu) &= P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_\nu \leq x_\nu) \\ &= P(X \leq x_1, \ldots, X \leq x_\nu) = F_X(x_1) \times \ldots \times F_X(x_\nu) \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$f_{X_1,\ldots,X_\nu}(x_1,\ldots,x_\nu) = f_X(x_1) \times \ldots \times f_X(x_\nu),$$

όπου $f_X(x)$ η σ.π.π. της τ.μ. X.

Ορισμός 4.6. *Οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_\nu$ (ανεξάρτητες ή όχι), οι οποίες ακολουθούν την ίδια κατανομή καλούνται* **ισόνομες***.*

Πόρισμα 4.2. Έστω το τυχαίο δείγμα $X_1, \ldots, X_\nu$ από την κατανομή $F_X(x)$, η οποία έχει μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Αν

$$\bar{X}_\nu = \frac{1}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu} X_\kappa, \tag{4.3}$$

τότε

$$E(\bar{X}_\nu) = \mu, \quad V(\bar{X}_\nu) = \frac{\sigma^2}{\nu}. \tag{4.4}$$

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες μέσης τιμής και διασποράς καθώς και ότι οι τ.μ. είναι ανεξάρτητες έχουμε

$$E(\bar{X}_\nu) = E(\frac{1}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu} X_\kappa) = \frac{1}{\nu}E(\sum_{\kappa=1}^{\nu} X_\kappa) = \frac{1}{\nu}\nu\mu = \mu$$

και

$$V(\bar{X}_\nu) = V(\frac{1}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu} X_\kappa) = \frac{1}{\nu^2}V(\sum_{\kappa=1}^{\nu} X_\kappa) = \frac{1}{\nu^2}\nu\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\nu}.$$

Νόμοι των Μεγάλων Αριθμών

Νόμος των Μεγάλων Αριθμών του Chebyshev

Έστω οι ανεξάρτητες τ.μ. $X_1, \ldots, X_\nu$ με $E(X_\kappa) = \mu_\kappa$ και $V(X_\kappa) = \sigma_\kappa^2$, $\kappa = 1, \ldots, \nu$ και έστω ότι

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{\nu^2} \sum_{\kappa=1}^{\nu} \sigma_\kappa^2 = 0.$$

Τότε

$$\lim_{\nu \to \infty} (\bar{X}_\nu - \bar{\mu}_\nu) = 0,$$

όπου $\bar{X}_\nu = \frac{1}{\nu} \sum_{\kappa=1}^{\nu} X_\kappa$ και $\bar{\mu}_\nu = \frac{1}{\nu} \sum_{\kappa=1}^{\nu} \mu_\kappa$.

Ο Νόμος αυτός είναι γνωστός ως ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών. Η απόδειξη στηρίζεται στην ανισότητα Chebyshev.

Νόμος των Μεγάλων Αριθμών του Khintchin

Έστω οι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. $X_1, \ldots, X_\nu$ με $E(X_\kappa) = \mu$ $\kappa = 1, \ldots \nu$. Τότε

$$\bar{X}_\nu \xrightarrow{P} \mu.$$

Ο Νόμος αυτός είναι ισχυρότερος από τον προηγούμενο αφού δεν υποθέτουμε την ύπαρξη των διασπορών των τ.μ. Υπενθυμίζουμε ότι η σύγκλιση αυτή είναι κατά πιθανότητα ή στοχαστική. Ο επόμενος Νόμος είναι ακόμα ισχυρότερος.

Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών

Έστω οι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. $X_1, \ldots, X_\nu$ με $E(X_\kappa) = \mu$ $\kappa = 1, \ldots \nu$. Τότε

$$\bar{X}_\nu \xrightarrow{\sigma.\beta.} \mu.$$

Η απόδειξη στηρίζεται στην **ανισότητα Kolmogorov** για την οποία παραπέμπουμε τον αναγνώστη στη σχετική βιβλιογραφία. Τονίζουμε ότι στην περίπτωση αυτή έχουμε την πιο ισχυρή σύγκλιση με πιθανότητα 1 ή σχεδόν βέβαια.

Για να εξηγήσουμε κάπως τον Ισχυρό Νόμο ας θεωρήσουμε το εξής παράδειγμα: Έστω ότι ένα πείραμα τύχης επαναλαμβάνεται ν φορές και οι επαναλήψεις είναι ανεξάρτητες η μία της άλλης (π.χ. ένα νόμισμα ρίχνεται ν φορές).

Έστω ότι σε κάθε επανάληψη ενδιαφερόμαστε αν συμβαίνει το ενδεχόμενο A, για το οποίο έχουμε $P(A) = p$. Ορίζουμε τις τ.μ.

$$X_\kappa = \begin{cases} 1 & \text{αν συμβαίνει το A} \\ 0 & \text{αν το A δεν συμβαίνει} \end{cases} \qquad \kappa = 1, \ldots, \nu$$

Από τον Ισχυρό Νόμο των Μεγάλων Αριθμών έχουμε ότι

$$\frac{X_1 + \ldots + X_\nu}{\nu} \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} E(X) = P(A) = p$$

Από τον ορισμό των τ.μ. X_κ έχουμε ότι το άθροισμα $X_1 + \ldots, +X_\nu$ είναι ο αριθμός εμφανίσεων του ενδεχομένου A στις πρώτες ν επαναλήψεις του πειράματος τύχης. Ο Ισχυρός Νόμος δηλώνει ότι με πιθανότητα 1 οριακά η αναλογία του χρόνου που το ενδεχόμενο A συμβαίνει είναι p.

Τέλος, σημειώνουμε ότι υπάρχουν και άλλοι Νόμοι Μεγάλων Αριθμών, καθώς και Ανισότητες χρήσιμες τόσο για τη θεωρητική τους δυναμική, όσο και για την εφαρμοσιμότητα τους. Αναφέραμε τις πιο συνήθεις και σημαντικές.

4.2 Κεντρικά Οριακά Θεωρήματα

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα των Lindeberg-Levy

Έστω η ακολουθία των ανεξαρτήτων και ισονόμων τ.μ. $X_\nu, \nu = 1, 2, \ldots$ με $E(X_\nu) = \mu$ και $V(X_\nu) = \sigma^2 < \infty, \nu = 1, 2, \ldots$. Έστω η ακολουθία των τυποποιημένων μέσων

$$Z_\nu = \frac{\bar{X}_\nu - \mu}{\sigma/\sqrt{\nu}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots.$$

και η αντίστοιχη ακολουθία των συναρτήσεων κατανομής

$$F_\nu(z), \quad \nu = 1, 2, \ldots.$$

Τότε

$$\lim_{\nu\to\infty} F_\nu(z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy,$$

όπου $\Phi(z)$ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Κανονικής κατανομής.

Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα θεωρείται το κορυφαίο αποτέλεσμα της θεωρίας Πιθανοτήτων. Με απλά λόγια το θεώρημα λέει ότι: Αν έχουμε μία ακολουθία ανεξαρτήτων και ισονόμων τ.μ. π.χ. Poisson με παράμετρο λ ή Εκθετικές με παράμετρο θ, ή ομοιόμορφες στο διάστημα [α,β], ή κ.λ.π., τότε θεωρώντας τον μέσο $\bar{X}_\nu$ και τυποποιώντας, δηλ., αφαιρώντας τη μέση τιμή και διαιρώντας με την τυπική απόκλιση, βλ. πόρισμα 4.2, η νέα ακολουθία που διαμορφώνεται συγκλίνει κατά νόμο στην **Κανονική κατανομή**. Αυτός είναι και ο λόγος που η Κανονική κατανομή θεωρείται η πιο σημαντική κατανομή στη Θεωρία Πιθανοτήτων. Η αποδεικτική διαδικασία είναι πολύ απαιτητική και πέραν του σκοπού αυτού του βιβλίου. Παραπέμπουμε στη σχετική βιβλιογραφία για περαιτέρω εμβάθυνση. Στη συνέχεια αναφέρουμε μία άλλη διατύπωση του θεωρήματος , η οποία συναντάται συχνά στις εφαρμογές και έχει ως εξής:

Αν αντί για την ακολουθία των τυποποιημένων μέσων θεωρήσουμε την ακολουθία των τυποποιημένων μερικών αθροισμάτων

$$Z_\nu = \frac{X_1 + \ldots + X_\nu - \nu\mu}{\sigma\sqrt{\nu}}, \nu = 1, 2, \ldots ,$$

τότε η ακολουθία των α.σ.κ. $F_\nu(z)$ των τ.μ. Z_ν συγκλίνει στην α.σ.κ. της Τυποποιημένης Κανονικής κατανομής $\Phi(z)$. Δηλ., έχουμε ότι

$$Z_\nu \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} Z,$$

όπου $Z \sim N(0, 1)$.

Διατυπώνουμε την πρώτη εκδοχή του κεντρικού οριακού θεωρήματος που οφείλεται στους De Moivre και Laplace και αφορά στη Διωνυμική κατανομή.

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα των De Moivre-Laplace

Έστω μία ακολουθία Y_ν ανεξαρτήτων και ισονόμων τ.μ. Bernoulli και η ακολουθία $X_\nu = Y_1 + \ldots + Y_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots$, δηλ., ο αριθμός των επιτυχιών στις ν δοκιμές. Η ακολουθία των τυποποιημένων X_ν

$$Z_\nu = \frac{X_\nu - \nu p}{\sqrt{\nu p(1-p)}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

συγκλίνει κατά Νόμο ή κατά κατανομή στην Τυποποιημένη Κανονική κατανομή.

Όπως γνωρίζουμε η τ.μ. X_ν ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους (ν, p). Έστω ότι ζητάμε την πιθανότητα

$$P(\alpha \leq X_\nu \leq \beta), \quad \alpha, \beta \text{ σταθερές και } \alpha < \beta.$$

Τότε σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu\to\infty} P(\alpha \le X_\nu \le \beta) &= \lim_{\nu\to\infty} P(\frac{\alpha-\nu p}{\sqrt{\nu p(1-p)}} \le \frac{X_\nu-\nu p}{\sqrt{\nu p(1-p)}} \le \frac{\beta-\nu p}{\sqrt{\nu p(1-p)}}) \\
&= \lim_{\nu\to\infty} P(\frac{\alpha-\nu p}{\sqrt{\nu p(1-p)}} \le Z_\nu \le \frac{\beta-\nu p}{\sqrt{\nu p(1-p)}}) \\
&= \Phi(\frac{\beta-\nu p}{\sqrt{\nu p(1-p)}}) - \Phi(\frac{\alpha-\nu p}{\sqrt{\nu p(1-p)}})
\end{aligned}$$

ή ότι

$$P(\alpha \le X_\nu \le \beta) \approx \Phi(\frac{\beta-\nu p}{\sqrt{\nu p(1-p)}}) - \Phi(\frac{\alpha-\nu p}{\sqrt{\nu p(1-p)}}).$$

Έχει παρατηρηθεί ότι η προσέγγιση της Διωνυμικής κατανομής από την N(0,1) είναι καλύτερη αν αντί για α παίρνουμε το $\alpha - 1/2$ και αντί για β παίρνουμε το $\beta + 1/2$. Η διαδικασία αυτή καλείται **διόρθωση συνέχειας**. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι γιατί προσεγγίζουμε μία διακριτή τ.μ. από μία συνεχή (Διωνυμική από N(0,1)).

Παραδείγματα

1. Ας θεωρήσουμε 100 ρίψεις ενός αμερόληπτου νομίσματος. Έστω η τ.μ. Y_ν που παίρνει την τιμή 1 αν κατά τη ν-οστή ρίψη το νόμισμα φέρει κεφαλή και 0 αν φέρει γράμματα. Έστω η τ.μ. X_{100} ο αριθμός των κεφαλών που εμφανίζονται στις 100 ρίψεις. Ποια είναι η πιθανότητα $P(50 \le X_{100} \le 60)$;

Η τ.μ. X_{100} παίρνει τις τιμές $\{0, 1, \ldots, 100\}$ και είναι $E(X_{100}) = 100 \times 1/2 = 50$ και $V(X_{100}) = 100 \times 1/2 \times 1/2 = 25$. Εφαρμόζοντας το κεντρικό οριακό θεώρημα των De Moivre-Laplace έχουμε

$$\begin{aligned}
P(50 \le X_{100} \le 60) &= P(\frac{50-50}{5} \le \frac{X_{100}-50}{5} \le \frac{60-50}{5}) \\
&= P(0 \le Z_\nu \le 2) \approx \Phi(2) - \Phi(0) \\
&= 0,9772 - 0,8413 = 0,1359.
\end{aligned}$$

2. Ας θεωρήσουμε μία ακολουθία ανεξαρτήτων και ισονόμων τ.μ. Y_ν Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας 1/2. Έστω $X_{25} = Y_1 + \ldots + Y_{25}$. Είναι $E(X_{25}) = 25 \times 1/2 = 12,5$ και $V(X_{25} = 25 \times 1/2 \times 1/2 = 6,25$. Ζητούμε την πιθανότητα $P(8 \le X_{25} \le 15)$.

α) Υπολογίζουμε την πιθανότητα χρησιμοποιώντας τη Διωνυμική κατανομή και τους αντίστοιχους πίνακες τιμών της. Έχουμε

$$P(8 \leq X_{25} \leq 15) = \sum_{\kappa=8}^{15} \binom{25}{\kappa} (1/2)^{25} = 0,8636.$$

β)Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση από την Τυποποιημένη Κανονική κατανομή έχουμε

$$\begin{aligned} P(8 \leq X_{25} \leq 15) &= P\left(\frac{8-12,5}{2,5} \leq \frac{X_{25}-12,5}{2,5} \leq \frac{15-12,5}{2,5}\right) \\ &= P\left(-1,8 \leq \frac{X_{25}-12,5}{2,5} \leq 1\right) \approx \Phi(1) - \Phi(-1,8) \\ &= 0,8413 - (1-0,9641) = 0,8054 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το σφάλμα που κάνουμε με την προσέγγιση είναι 0,8636-0,8054=0,0582.

γ)Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε τη διόρθωση συνέχειας για να διαπιστώσουμε τη καλυτέρευση της προσέγγισης.

$$\begin{aligned} P(8 \leq X_{25} \leq 15) &= P\left(\frac{8-12,5-0,5}{2,5} \leq \frac{X_{25}-12,5}{2,5} \leq \frac{15-12,5+0,5}{2,5}\right) \\ &= P\left(-2 \leq \frac{X_{25}-12,5}{2,5} \leq 1,2\right) \approx \Phi(1,2) - \Phi(-2) \\ &= 0,8849 - 1 + 0,9772 = 0,8621 \end{aligned}$$

Το σφάλμα τώρα είναι 0,8636-0,8621=0,0015, το οποίο είναι κατά πολύ μικρότερο από την προηγούμενη προσέγγιση.

3.Έστω 100 όμοιες λυχνίες των οποίων ο χρόνος ζωής, σε ώρες, είναι τ.μ. X που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\theta = 1/500$ και οι οποίες λειτουργούν ανεξάρτητα η μία της άλλης. Έστω $S_{100} = X_1 + \ldots + X_{100}$ ο συνολικός χρόνος ζωής των 100 λυχνιών. Ζητούμε την πιθανότητα $P(S_{100} > 60000)$.

Παρατηρούμε ότι αν $X_\varkappa$ είναι ο χρόνος ζωής της κ-λυχνίας, τότε $E(X_\varkappa) = 500$ και $V(X_k) = 500^2$. Άρα $E(S_{100}) = 50000$ και $V(S_{100}) = 100500^2$ λόγω ανεξαρτησίας. Εφαρμόζοντας το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα έχουμε

$$\begin{aligned} P(S_{100} > 60000) &= P(S_{100} > 60000) = 1 - P(S_{100} \leq 60000) \\ &= 1 - P\left(\frac{S_{100}-50000}{5000} \leq \frac{60000-50000}{5000}\right) \\ &= 1 - P\left(\frac{S_{100}-50000}{5000} \leq 2\right) \\ &\approx 1 - \Phi(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228. \end{aligned}$$

4. Συνέχεια του προηγούμενου παραδείγματος:Ποια είναι η πιθανότητα σε ένα τυχαίο δείγμα 200 λυχνιών να βρεθούν το πολύ 10 με χρόνο ζωής μικρότερο από 300 ώρες;

Έστω η δίτιμη τ.μ. Bernoulli που ορίζεται ως εξής:

$$Y_\kappa = \begin{cases} 1 & \text{αν} X_\kappa < 300 \\ 0 & \text{αν} X_\kappa \geq 300 \end{cases}, \kappa = 1, \ldots, 200$$

και έστω η τ.μ. $S_{200} = Y_1 + \ldots, Y_{200}$. Ζητούμε την πιθανότητα $P(S_{200} \leq 10)$.

Είναι φανερό ότι η τ.μ. S_{200} ως άθροισμα διτίμων Bernoulli ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $\nu = 200 \quad \text{και} \quad p = P(X < 300)$. Ας υπολογίσουμε την $P(X < 300)$. Είναι

$$P(X < 300) = \int_0^{300} (1/500) e^{-(1/500)x} dx = 1 - e^{-3/5} = 0,45.$$

Άρα $E(S_{200}) = 200 \times 0,45 = 90$ και $V(S_{200}) = 200 \times 0,45 \times 0,55 = 49,5 \approx 7$. Εφαρμόζοντας το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα των De Moivre-Laplace έχουμε

$$\begin{aligned} P(S_{200} \leq 10) &= P(\frac{S_{200} - 90}{7} \leq \frac{10 - 90}{7}) \\ &= P(\frac{S_{200} - 90}{7} \leq -11,43) \approx \Phi(-11,43) \\ &= 1 - \Phi(11,43) \approx 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

5.Έστω ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους $\nu = 25$ από την κατανομή με σ.π.π. $f(x) = x^3/4, 0 < x < 2$. Ζητάμε την πιθανότητα $P(1,5 < \overline{X}_{25} < 1,7)$. Αρχικά υπολογίζουμε τη E(X) και τη V(X). Είναι E(X)=1,6 και V(X)=8/75. Από τις σχέσεις 3 και 4 έχουμε ότι $E(\overline{X}_{25}) = 1,6 \quad V(\overline{X}_{25}) = \frac{(8/75)^2}{25} = 0,06531$. Τυποποιώντας και εφαρμόζοντας το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα έχουμε

$$\begin{aligned} P(1,5 < \overline{X}_{25} < 1,7) &= P(\frac{1,5 - 1,6}{0,06531} < \frac{\overline{X}_{25} - 1,6}{0,06531} < \frac{1,7 - 1,6}{0,06531}) \\ &= P(-1,531 < Z_{25} < 1,531) \approx \Phi(1,531) - \Phi(-1,531) \\ &= 2\Phi(1,531) - 1 = 2 \times 0,9370 - 1 = 0,874. \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 5

Εκτιμητική

1. Εισαγωγή

Στα προηγούμενα κεφάλαια ασχοληθήκαμε με συγκεκριμένες συναρτήσεις κατανομών των οποίων οι παράμετροι είναι γνωστοί εκ των προτέρων. Στις πρακτικές εφαρμογές, η κατανομή και οι σχετικές με αυτήν παράμετροι πρέπει να εκτιμηθούν από συγκεκριμένα δεδομένα κατάλληλα επιλεγμένα από το σύνολο πραγματικών δεδομένων που αφορούν σε όλο τον **πληθυσμό** του οποίου διερευνούμε συγκεκριμένα **χαρακτηριστικά**. Ας θεωρήσουμε έναν πληθυσμό του οποίου τα μέλη έχουν κάποιο ή κάποια χαρακτηριστικά, τα οποία μας ενδιαφέρουν και επιθυμούμε να τα μετρήσουμε. Για παράδειγμα, πληθυσμός μπορεί να θεωρηθούν όλοι οι ενήλικες μιας πόλης και χαρακτηριστικά μπορούν να θεωρηθούν το ετήσιο εισόδημά τους, οι ώρες εργασίας τους ημερησίως, το μορφωτικό επίπεδό τους, η χρησιμοποίηση Η/Υ, πως χρησιμοποιούν τον ελεύθερο χρόνο τους κ.λ.π. Επίσης, πληθυσμός μπορεί να θεωρηθεί η εβδομαδιαία παραγωγή στοιχείων ή εξαρτημάτων υψηλής τεχνολογίας μιας εταιρίας και χαρακτηριστικό μπορεί να θεωρηθεί ο χρόνος ζωής τους ή η ανταποκρισιμότητά τους σε συγκεκριμένες προδιαγραφές. Το κάθε μέλος του πληθυσμού μας δίνει για κάθε χαρακτηριστικό συγκεκριμένη τιμή και όλες οι τιμές που παίρνουμε είναι τιμές μιας τυχαίας μεταβλητής που περιγράφει αυτό το χαρακτηριστικό.

Στις περισσότερες εφαρμογές, η συνάρτηση κατανομής αυτής της τυχαίας μεταβλητής είναι εντελώς άγνωστη και το να εξεταστεί όλος ο πληθυσμός εντελώς ασύμφορη διαδικασία. Έτσι, αυτό που επιχειρείται είναι να εξαχθούν κάποια συμπεράσματα για την κατανομή αυτή χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλα επιλεγμένο υποσύνολο του πληθυσμού και τα σχετικά δεδομένα που μας παρέχει. Το υποσύνολο αυτό καλείται **δείγμα** και η μαθηματική διαδικασία που επιτυγχάνει αυτό το σκοπό καλείται **στατιστική συμπερασματολογία**.

Η διαδικασία επιλογής του δείγματος πρέπει να πληροί τα εξής δύο προφανή κριτήρια: Πρώτον, καθώς το μέγεθος το δείγματος αυξάνεται, η εκτίμηση του χαρακτηριστικού πλησιάζειτην πραγματική του τιμή, με πλήρη ταύτιση αν το δείγμα αποτελείται από ολόκληρο τον πληθυσμό. Δεύτερο, όποιο και αν είναι το μέγεθος του δείγματος , το δείγμα πρέπει να είναι "αντιπροσωπευτικό" του πληθυσμού. Αυτά τα δύο επιθυμητά κριτήρια (που δεν πληρούνται πάντα) της δειγματοληπτικής διαδικασίας θα μας οδηγήσουν στους ορισμούς δύο σημαντικών ιδιοτήτων μιας εκτίμησης που καλούνται **συνέπεια** και **αμεροληψία** αντίστοιχα, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

2. Εκτίμηση Παραμέτρων

Όταν αναφέρουμε ότι ο πληθυσμός ακολουθεί την κατανομή $F(x)$, εννοούμε ότι ενδιαφερόμαστε να μελετήσουμε το χαρακτηριστικό X των μελών του πληθυσμού και ότι αυτό το χαρακτηριστικό X είναι τυχαία μεταβλητή με κατανομή $F(x)$. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ως πληθυσμό τη μηνιαία παραγωγή εταιρείας για chips Η/Υ και χαρακτηριστικό X το χρόνο ζωής τους. Η X είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί μία κατανομή $F(x)$ για την οποία δεν γνωρίζουμε τη μέση τιμή και τη διασπορά της και ενδιαφερόμαστε να εκτιμήσουμε αυτές τις παραμέτρους, που όπως γνωρίζουμε είναι οι πιο σημαντικές. Λαμβάνοντας ένα δείγμα μεγέθους n από την παραγωγή και εξετάζοντας το κάθε chip ως προς το χρόνο ζωής του θα έχουμε μία συλλογή δεδομένων $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Κάθε x_i είναι τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής X_i. Το σύνολο των τυχαίων μεταβλητών $X_1, \ldots, X_n$ αποτελεί ένα δείγμα μεγέθους n από τον πληθυσμό. Όπως αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, το δείγμα μας πρέπει να είναι "αντιπροσωπευτικό". Αυτό μας οδηγεί στον εξής ορισμό:

Ορισμός 5.1 Το σύνολο των τυχαίων μεταβλητών $X_1, \ldots, X_n$ αποτελεί ένα **τυχαίο δείγμα** μεγέθους n από τον πληθυσμό με κατανομή $F(x)$, αν είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με $F_{X_i}(x) = F(x), \forall i$ και $\forall x$. $\sharp$

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι ο παραπάνω ορισμός δεν ισχύει αν η δειγματοληψία (λήψη του δείγματος) έχει γίνει χωρίς επανάθεση από ένα πεπερασμένο πληθυσμό μεγέθους N, αφού τότε η εξαγωγή ενός στοιχείου από τον πληθυσμό μπορεί να αλλοιώσει το χαρακτηριστικό για το οποίο ενδιαφερόμαστε. Στην περίπτωση αυτή η ανεξαρτησία του παραπάνω ορισμού αντικαθίσταται από την εξής συνθήκη:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N-1} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{N-n+1} = \frac{(N-n)!}{N!}$$

Στη συνέχεια θα υποθέτουμε ότι το μέγεθος του πληθυσμού είναι πολύ μεγάλο, ιδεατά άπειρο, έτσι ώστε να ισχύει ο ορισμός 5.1. Η διαφορετική περίπτωση θα τονίζεται ιδιαιτέρως.

Τις περισσότερες φορές, για να εξάγουμε την επιθυμητή πληροφορία από το τυχαίο δείγμα (για παράδειγμα, για τη μέση τιμή ή τη διασπορά) είναι αναγκαίο να υπολογίσουμε κατάλληλες ποσότητες χρησιμοποιώντας τις παρατηρήσεις $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Μια τέτοια είναι, για παράδειγμα, η δειγματική μέση τιμή $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Είναι φανερό ότι οι παρατηρήσεις ενός άλλου τυχαίου δείγματος θα μας δώσουν μία άλλη δειγματική μέση τιμή, αφού αυτή προσδιορίζεται από τις τυχαίες μεταβλητές $X_1, \ldots, X_n$. Άρα η συνάρτηση

$$\overline{X} \;=\; \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

είναι τυχαία μεταβλητή. Γενικά έχουμε τον εξής ορισμό για τέτοιου είδους συναρτήσεις:

Ορισμός 5.2 Κάθε συνάρτηση $T(X_1, \ldots, X_n)$ του τυχαίου δείγματος $X_1, \ldots, X_n$ καλείται **στατιστική συνάρτηση**. ♯

Η στατιστική συνάρτηση T είναι συνάρτηση τυχαίων μεταβλητών και υποθέτοντας ότι είναι επίσης μία τυχαία μεταβλητή έχει κάποια συνάρτηση κατανομής, η οποία συνήθως καλείται **δειγματική κατανομή** της T και μπορεί να προσδιορισθεί με βάση την κατανομή του πληθυσμού $F(x)$. Με βάση τα παραπάνω η συνάρτηση $\overline{X}$ είναι μία στατιστική συνάρτηση της οποίας η κατανομή μπορεί να προσδιορισθεί. Το ίδιο ισχύει και για τη δειγματική διασπορά S^2, την οποία θα ορίσουμε αργότερα.

Ορισμός 5.3 Κάθε στατιστική συνάρτηση $\widehat{\Theta} = \widehat{\Theta}(X_1, \ldots, X_n)$ που χρησιμοποιείται για να εκτιμηθεί μία παράμετρος του πληθυσμού θ καλείται **εκτιμήτρια** της θ. Η τιμή της $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$, που βασίζεται σε συγκεκριμένο δείγμα καλείται **εκτίμηση** της παραμέτρου θ. ♯

Μία στατιστική συνάρτηση $\widehat{\Theta}$ δεν μπορεί να εγγυηθεί καλή εκτίμηση της παραμέτρου θ για κάθε δείγμα. Μπορούμε όμως να προσδιορίσουμε τέτοιες στατιστικές συναρτήσεις ώστε να έχουμε καλές εκτιμήσεις κατά μέσο όρο. Αυτό μας οδηγεί στον εξής ορισμό:

Ορισμός 5.4 Μία στατιστική συνάρτηση $\widehat{\Theta} = \widehat{\Theta}(X_1, \ldots, X_n)$ αποτελεί **αμερόληπτη** εκτιμήτρια της παραμέτρου θ αν ισχύει

$$\mathbb{E}[\widehat{\Theta}(X_1, \ldots, X_n)] = \theta$$

♯

Παράδειγμα 5.1 Θα δείξουμε ότι η δειγματική μέση τιμή $\overline{X}$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου μ, δηλαδή της μέσης τιμής του πληθυσμού. Είναι

$$\mathbb{E}[\overline{X}] = \mathbb{E}\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X] = \frac{1}{n}n\mathbb{E}[X] = \mu$$

Ας υπολογίσουμε τώρα τη διασπρορά της δειγματικής μέσης τιμής. Λαμβάνοντας υπόψη την ανεξαρτησία των $X_1 \ldots, X_n$ έχουμε

$$\mathrm{Var}[\overline{\mathrm{X}}] = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{Var}[\frac{\mathrm{X_i}}{\mathrm{n}}] = \frac{1}{\mathrm{n}^2}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{Var}[\mathrm{X_i}] = \frac{\mathrm{nVar}[\mathrm{X_i}]}{\mathrm{n}^2} = \frac{\mathrm{Var}[\mathrm{X}]}{\mathrm{n}} = \frac{\sigma^2}{\mathrm{n}}.$$

Παρατηρώντας την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι η ακρίβεια της δειγματικής μέσης τιμής ως εκτιμήτριας της μέσης τιμής του πληθυσμού αυξάνεται καθώς το μέγεθος του δείγματος αυξάνεται, με την προϋπόθεση ότι η διασπορά του πληθυσμού είναι πεπερασμένη.

Για να προσδιορίσουμε μία αμερόληπτη εκτιμήτρια της διασποράς του πληθυσμού σ^2 ας θεωρήσουμε κατ' αρχή τη στατιστική συνάρτηση

$$\widehat{\Theta}(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n}.$$

Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι η παραπάνω στατιστική συνάρτηση δεν είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της διασποράς του πληθυσμού, ενώ μία μικρή τροποποίησή της μας παρέχει το ζητούμενο, όπως φαίνεται στη συνέχεια. Έστω η στατιστική συνάρτηση

$$\widehat{\Theta}(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$$

Οι δύο τελευταίες στατιστικές συναρτήσεις διαφέρουν ελάχιστα όταν το μέγεθος του δείγματος είναι σχετικά μεγάλο.

Παράδειγμα 5.2 Η δειγματική διασπορά S^2 που ορίζεται από τη σχέση

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$$

είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της διασποράς του πληθυσμού σ^2 στην περίπτωση που υπάρχει. Εφαρμόζοντας γνωστές ιδιότητες της μέσης τιμής και διασποράς μετά από κάποιες αλγεβρικές πράξεις έχουμε:

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\overline{X} + \overline{X}^2) \\ &= \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i^2) - \frac{2n}{n-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)\overline{X} + \frac{n\overline{X}^2}{n-1} \\ &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{n}{n-1}\overline{X}^2. \end{aligned}$$

Θα ελέγξουμε τώρα αν ισχύει η σχέση $\mathbb{E}[S^2] = \sigma^2$. Είναι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S^2] &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i^2] - \frac{n}{n-1}\mathbb{E}[\overline{X}^2] \\ &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Var[X_i]} + (\mathbb{E}[\mathrm{X_i}])^2\right) - \frac{n}{n-1}\left(\mathrm{Var}[\overline{\mathrm{X}}] + (\mathbb{E}[\overline{\mathrm{X}}])^2\right) \\ &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2 + \mu^2) - \frac{n}{n-1}\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) \\ &= \frac{1}{n-1}n(\sigma^2 + \mu^2) - \frac{n}{n-1}\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) \;=\; \sigma^2. \end{aligned}$$

Η αμεροληψία είναι μία από τις επιθυμητές ιδιότητες μιας εκτιμήτριας. Το κριτήριο αυτό από μόνο του δεν μας παρέχει μία μοναδική εκτιμήτρια, όπως είναι φανερό από το επόμενο προφανές παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.3 Η στατιστική συνάρτηση

$$\widehat{\Theta} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$$

είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της μέσης τιμής του πληθυσμού μ για κάθε πραγματικούς αριθμούς α_i τέτοιους ώστε $\sum \alpha_i \;=\; 1$.

Έτσι, είναι αναγκαίο να προσδιορίσουμε ένα κριτήριο με βάση το οποίο να μπορούμε να επιλέξουμε την καλύτερη από τις αμερόληπτες εκτιμήτριες της παραμέτρου που μας ενδιαφέρει. Για να είναι καλή μία εκτιμήτρια $\widehat{\Theta}$ της παραμέτρου θ πρέπει η πιθανότητα $\mathbb{P}(|\widehat{\Theta} - \theta| \geq \varepsilon)$, δηλ. η πιθανότητα της διασποράς της, να είναι όσο γίνεται πιο μικρή. Λαμβάνοντας υπόψη την αμεροληψία, δηλ. ότι $\mathbb{E}[\widehat{\Theta}] = \theta$, η ανισότητα Chebyshev μας δίνει

$$\mathbb{P}(|\widehat{\Theta} - \theta| \geq \varepsilon) \;\leq\; \frac{\mathrm{Var}[\widehat{\Theta}]}{\varepsilon^2}, \quad \text{για } \varepsilon > 0.$$

Επομένως, ένας τρόπος για να συγκρίνουμε δύο αμερόληπτες εκτιμήτριες είναι να συγκρίνουμε τις διασπορές τους. Αυτό μας οδηγεί στον εξής ορισμό:

Ορισμός 5.5 Μία εκτιμήτρια $\widehat{\Theta}_1$ είναι πιο **αποτελεσματική** εκτιμήτρια της παραμέτρου θ του πληθυσμού από την $\widehat{\Theta}_2$ αν ισχύουν τα ακόλουθα:

1) $\widehat{\Theta}_1$ και $\widehat{\Theta}_2$ είναι αμερόληπτες εκτιμήτριες της θ και
2) $\mathrm{Var}[\widehat{\Theta}_1] \;<\; \mathrm{Var}[\widehat{\Theta}_2]$.

♯

Παράδειγμα 5.4 Θα δείξουμε ότι η δεγματική μέση τιμή $\overline{X}$ είναι η πιο αποτελεσματική (ελάχιστης διασποράς) γραμμική εκτιμήτρια της μέσης τιμής του πληθυσμού μ στις περιπτώσεις που αυτή υπάρχει. Από το παράδειγμα 5.3, λόγω της ανεξαρτησίας και ισονομίας των $X_1, \ldots, X_n$, έχουμε

$$\mathrm{Var}[\widehat{\Theta} == \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \mathrm{Var}[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \mathrm{Var}[X] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma^2.$$

Το πρόβλημα που έχουμε τώρα είναι να ελαχιστοποιήσουμε την ποσότητα

$$\mathrm{Var}[\widehat{\Theta}] = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \quad \text{υπό την προϋπόθεση} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ \alpha_i > 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange παίρνουμε το αποτέλεσμα

$$\alpha_i \;=\; \frac{1}{n}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Αυτό σημαίνει ότι η εκτιμήτρια με την ελάχιστη διασπορά είναι η δειγματική μέση τιμή

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i \;=\; \overline{X}.$$

Με παρόμοια διαδικασία και κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες αποδεικνύεται ότι η δειγματική διασπορά S^2 είναι η πιο αποτελεσματική (ελάχιστης διασποράς)τετραγωνικής μορφής αμερόληπτη εκτιμήτρια της διασποράς του πληθυσμού

σ^2 στις περιπτώσεις που υπάρχει. Για τους παραπάνω λόγους, στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές η $\overline{X}$ και η S^2 χρησιμοποιούνται ως εκτιμήτριες της μέσης τιμής μ και της διασποράς σ^2 του πληθυσμού αντίστοιχα.

Όπως είδαμε η $\mathrm{Var}[\overline{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$ φθίνει καθώς το n μεγαλώνει. Γενικά, το ίδιο συμβαίνει και για τη διασπορά της δειγματικής κατανομής μιας εκτιμήτριας. Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στο να διατυπώσουμε ακόμα μία επιθυμητή ιδιότητα μιας εκτιμήτριας:

Ορισμός 5.6 Μία εκτιμήτρια $\widehat{\Theta}$ της παραμέτρου θ του πληθυσμού καλείται **συνεπής** αν $\widehat{\Theta}$ συγκλίνει κατά πιθανότητα στο θ. Δηλ. αν

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\widehat{\Theta} - \theta| \geq \varepsilon) \;=\; 0.$$

♯

Καθώς το n μεγαλώνει, μία συνεπής εκτιμήτρια πλησιάζει την πραγματική τιμή της παραμέτρου. Αν θεωρήσουμε έναν πληθυσμό με πεπερασμένη μέση τιμή και διασπορά, τότε από το ότι $\mathrm{Var}[\overline{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$ και από την ανισότητα Chebyshev συμπεραίνουμε ότι η δειγματική μέση τιμή είναι συνεπής εκτιμήτρια της μέσης τιμής του πληθυσμού. Τέλος, παρατηρούμε ότι κάθε αμερόληπτη εκτιμήτρια $\widehat{\Theta}$ της παραμέτρου θ με την ιδιότητα

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}[\widehat{\Theta}] \;=\; 0$$

είναι συνεπής εκτιμήτρια της παραμέτρου θ λόγω της ανισότητας Chebyshev.

5.2.1 Μέθοδος των Ροπών

Έστω ότι επιθυμούμε να εκτιμήσουμε μία ή περισσότερες παραμέτρους της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X. Γνωρίζουμε ότι η ροπή r-τάξης της κατανομής της X (δηλ. του πληθυσμού) ορίζεται από τη σχέση

$$\mu_r \;=\; \mathbb{E}[X^r], \quad r = 1, 2, \dots\,.$$

Οι αντίστοιχες δειγματικές ροπές ορίζονται από τη σχέση

$$M_r \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^r}{n}, \quad r = 1, 2, \dots\,.$$

Η μέθοδος των ροπών συνίσταται στο να εξισώσουμε τις τις πρώτες κ ροπές του πληθυσμού με τις πρώτες κ δειγματικές ροπές αν θέλουμε να εκτιμήσουμε κ παραμέτρους της κατανομής της X. Η λύση του συστήματος θα μας δώσει τις εκτιμήσεις που ζητάμε. Με τη μέθοδο αυτή παίρνουμε απλές, συνεπείς εκτιμήτριες, αλλά πολλές φορές όχι αμερόληπτες και αποτελεσματικές.

Παράδειγμα 5.5 Έστω ότι η μνήμη που χρειάζεται μια εργασία για να διεκπεραιωθεί από έναν υπολογιστή είναι τυχαία μεταβλητή για την οποία εικάζουμε ότι έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$\begin{aligned} f(x) &= (k+1)x^k, \quad 0 < x < 1,\ k > 0 \\ &= 0, \text{ διαφορετικά.} \end{aligned}$$

Μεγάλες τιμές του k δηλώνουν εργασία που απαιτεί πολύ μνήμη, ενώ για $k = 0$ έχουμε ότι η κατανομή του μεγέθους μνήμης που απαιτείται ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 1]$ (σε κατάλληλες μονάδες μέτρησης). Το ζητούμενο είναι να εκτιμήσουμε την παράμετρο k από το ακόλουθο δείγμα μεγέθους $n = 8$

$$0.25, \quad 0.45, \quad 0.55, \quad 0.75, \quad 0.85, \quad 0.85, \quad 0.95, \quad 0.90.$$

Αφού έχουμε να εκτιμήσουμε μία παράμετρο, αρκεί να υπολογισθεί η πρώτη ροπή της κατανομής και να εξισωθεί με τη δειγματική ροπή. Ένας απλός υπολογισμός μας δίνει

$$\mu_1 = \int_0^1 (k+1)x^k x dx = \frac{k+1}{k+2}$$

και

$$M_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^1}{n} = \frac{5.55}{8} = 0.69375.$$

Εξισώνοντας τις δύο ροπές έχουμε

$$\frac{\widehat{k}+1}{\widehat{k}+2} = 0.69375 \quad \text{ή} \quad \widehat{k} = 1,2653.$$

Παράδειγμα 5.6 Έστω ότι ο χρόνος επιδιόρθωσης ενός μηχανήματος ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ, την οποία θέλουμε να εκτιμήσουμε. Από ένα τυχαίο δείγμα χρόνων επιδιόρθωσης μεγέθους n παίρνουμε τη δειγματική μέση τιμή, δηλ. M_1 και εξισώνοντας την με τη μέση τιμή της εκθετικής $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$ έχουμε

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{M_1}.$$

Έστω ότι η διαδικασία της επιδιόρθωσης γίνεται σε α στάδια ανεξάρτητα το ένα του άλλου και ότι ο χρόνος που απαιτείται σε κάθε στάδιο είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Τότε είναι γνωστό ότι ο συνολικός χρόνος επιδιόρθωσης ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους α και λ. Για να εκτιμήσουμε τις δύο παραμέτρους πρέπει από το τυχαίο δείγμα μας να υπολογίσουμε τις δύο πρώτες δειγματικές ροπές, έστω M_1, M_2 και να τις εξισώσουμε με τις δύο πρώτες ροπές της Γάμμα κατανομής που είναι (βλ. πίνακα II του Παραρτήματος)

$$\mu_1 = \mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\lambda} \qquad \mu_2 = \mathbb{E}[X^2] = \frac{\alpha}{\lambda^2} + \mu_1$$

Οι εκτιμήσεις $\widehat{\alpha}$ και $\widehat{\lambda}$ των παραμέτρων λαμβάνονται από τις σχέσεις

$$M_1 = \frac{\widehat{\alpha}}{\widehat{\lambda}}, \qquad M_2 = \frac{\widehat{\alpha}}{\widehat{\lambda}^2} + \frac{\widehat{\alpha}^2}{\widehat{\lambda}^2}.$$

Άρα

$$\widehat{\alpha} = \frac{M_1^2}{M_2 - M_1^2} \quad \text{και} \quad \widehat{\lambda} = \frac{M_1}{M_2 - M_1^2}.$$

5.2.1 Μέθοδος Μεγίστης Πιθανοφάνειας

Η αρχή της μεθόδου αυτής είναι να επιλέξουμε μία εκτίμηση της παραμέτρου θ του πληθυσμού, έτσι ώστε το δείγμα που έχουμε στη διάθεσή μας να είναι το πιο πιθανό (να έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να συμβεί). Χρησιμοποιώντας τα επόμενα δύο παραδείγματα θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε τη μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας και στη συνέχεια να τη διατυπώσουμε σε πιο γενική μορφή.

Παράδειγμα 5.7 Ας υποθέσουμε ότι ένα μήνυμα μεταδίδεται από ένα σύστημα με πιθανότητα επιτυχίας p. Παρατηρούμε n μεταδόσεις αυτού του μηνύματος και καταγράφουμε k επιτυχείς μεταδόσεις. Από αυτά τα δεδομένα επιθυμούμε να εκτιμήσουμε την πιθανότητα επιτυχούς μετάδοσης. Η επιτυχής μετάδοση του μηνύματος, έστω X, ακολουθεί την κατανομή Bernoulli με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0,\ 1, \quad 0 \le p \le 1.$$

Έστω $X_1, \ldots, X_n$ το τυχαίο δείγμα μας. Το πρόβλημα είναι να προσδιορίσουμε μία στατιστική συνάρτηση $T(X_1, \ldots, X_n)$ τέτοια ώστε η τιμή $t(x_1, \ldots, x_n)$ που θα πάρουμε από τις παρατηρηθείσες τιμές να αποτελεί μία "καλή" εκτιμήτρια της παραμέτρου n. Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των $X_1, \ldots, X_n$ δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = x_1,\ \ldots,\ X_n = x_n) &= \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} \\ &= p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}. \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση, με σταθερό το μέγεθος του δείγματος n και τις παρατηρηθείσες τιμές $x_1, \ldots, x_n$, είναι μία συνάρτηση του p και καλείται **συνάρτηση πιθανοφάνειας**. Συνήθως γράφουμε

$$L(p) \;= p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}, \quad 0 \leq p \leq 1.$$

Η τιμή του p, έστω $\widehat{p}$, που μεγιστοποιεί αυτήν τη συνάρτηση πιθανότητας αποτελεί την εκτίμηση μεγίστης πιθανοφάνειας του p. Αντί για την μεγιστοποίηση της συνάρτησης $L(p)$ προχωράμε στην ισοδύναμη διαδικασία μεγιστοποίησης της συνάρτησης $\ln L(p)$. Είναι

$$\ln L(p) \;=\; (\sum_{i=1}^{n} x_i)\ln p \;+\; (n - \sum_{i=1}^{n} x_i)\ln(1-p).$$

Υποθέτοντας ότι $0 < p < 1$, παραγωγίζοντας και εξισώνοντας με το μηδέν έχουμε

$$\frac{d\ln L(p)}{dp} \;=\; (\sum_{i=1}^{n} x_i)\left(\frac{1}{p}\right) \;+\; (n - \sum_{i=1}^{n} x_i)\left(\frac{-1}{1-p}\right) \;=\; 0$$

η οποία μας δίνει

$$p \;=\; \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \;=\; \overline{x}.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $\ln L(p)$ είναι αρνητική για $p = \overline{x}$. Άρα πράγματι μεγιστοποιεί τη $\ln L(p)$. Συνεπώς, η στατιστική συνάρτηση $\sum \frac{X_i}{n} = \overline{X}$ είναι η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου p. Γράφουμε

$$\widehat{p} \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \;=\; \overline{X}.$$

Παράδειγμα 5.8 Ο χρόνος ζωής, έστω X, ενός διακόπτη τηλεφωνικού συστήματος ακολουθεί την εκθετική κατανομή με άγνωστη παράμετρο θ. Επιθυμούμε να εκτιμήσουμε την παράμετρο στηριζόμενοι σε ένα τυχαίο δείγμα χρόνων ζωής του συγκεκριμένου είδους διακόπτη μεγέθους n, έστω $X_1, \ldots, X_n$. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκθετικής κατανομής είναι

$$f(x) \;=\; \theta e^{-\theta x}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad 0 < \theta < \infty.$$

Άρα η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, που αποτελεί τη συνάρτηση πιθανοφάνειας $L(\theta)$, είναι

$$L(\theta) = f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1) \cdot \cdots \cdot f(x_n) = \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta x_i} \; = \; \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, παραγωγίζοντας τη συνάρτηση $L(\theta)$ ως προς θ και εξισώνοντας με το μηδέν έχουμε

$$\frac{dL(\theta)}{d\theta} = n\theta^{n-1} e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i} - \sum_{i=1}^{n} x_i \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i} = 0.$$

η οποία μας δίνει ότι η συνάρτηση $L(\theta)$ μεγιστοποιείται για

$$\theta \; = \; \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Άρα η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου θ είναι

$$\widehat{\Theta} \; = \; \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \; = \; \frac{1}{\overline{X}}.$$

και η τιμή $\widehat{\theta} \; = \; \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$ αποτελεί την εκτίμηση μεγίστης πιθανοφάνειας.

Αφού η μέση τιμή της εκθετικής είναι $\mu_1 = \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\theta}$ συμπεραίνουμε ότι η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας του μέσου χρόνου ζωής του διακόπτη είναι η δειγματική μέση τιμή $\overline{X}$.

Τα τελευταία δύο παραδείγματα μας οδηγούν στη διατύπωση γενικών σχέσεων που αφορούν στη συνάρτηση πιθανοφάνειας και στις εκτιμήτριες μεγίστης πιθανοφάνειας. Τις περισσότερες φορές η κατανομή του πληθυσμού εξαρτάται από περισσότερες της μιας παραμέτρους, δηλ έχουμε ένα διάνυσμα $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$, το οποίο επιθυμούμε να εκτιμήσουμε. Αν το χαρακτηρισικό του πληθυσμού περιγράφεται από διακριτή τυχαία μεταβλητή, έστω $p_X(x|\theta) = \mathbb{P}(X = x|\theta)$, τότε η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας του τυχαίου δείγματος είναι

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n|\theta) \; = \; \prod_{i=1}^{n} p_{X_i}(x_i|\theta)$$

και η συνάρτηση πιθανοφάνειας

$$L(\theta) \; = \; \prod_{i=1}^{n} p_{X_i}(x_i|\theta).$$

Ανάλογα, άν το χαρακτηριστικό του πληθυσμού περιγράφεται από συνεχή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x|\theta)$, τότε η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i|\theta).$$

Η διαδικασία μεγιστοποίησης της συνάρτησης πιθανοφάνειας $L(\theta)$ ως προς τις παραμέτρους $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$, δηλ. το σύστημα

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, k$$

μας δίνει τη λύση

$$\{\xi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \xi_k(x_1, \ldots, x_n)\}$$

κάτω από κατάλληλες συνθήκες. Άρα οι

$$\begin{aligned} \widehat{\theta}_1 &= \xi_1(X_1, \ldots, X_n) \\ &\;\;\vdots \\ \widehat{\theta}_k &= \xi_k(X_1, \ldots, X_n) \end{aligned}$$

είναι οι εκτιμήτριες μεγίστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$, ενώ οι τιμές των ξ_i, $i = 1, \ldots, k$ για τις παρατηρηθείσες τιμές $x_1, \ldots, x_n$ μας δίνουν τις εκτιμήσεις των παραμέτρων $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$.

Οι εκτιμήτριες που παράγονται από τη μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας είναι συνεπείς, πολλές φορές αποτελεσματικές κάτω από κατάλληλες συνθήκες, αλλά για δείγματα μικρού μεγέθους μπορεί να χαθεί η αμεροληψία. Γενικά, ως μέθοδος λειτουργεί αρκετά καλα, αλλά μερικές φορές εμφανίζονται δυσκολίες ως προς τη λύση του συστήματος. Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε εκτιμήτριες μεγίστης πιθανοφάνειας για τη Γάμμα κατανομή σε κλειστή μορφή, όπως έγινε στο παράδειγμα 5.6 με τη μέθοδο των ροπών. Επίσης, μπορεί να μη υπάρχει μοναδική λύση του συστήματος και αν υπάρχει μπορεί η λύση να μη ανήκει στον παραμετρικό χώρο, εκεί δηλ. που ορίζονται οι παράμετροι (για παράδειγμα, $0 < p < 1$, $0 < \theta < \infty$). Στις περιπτώσεις αυτές απαιτούνται διαδικασίες μεγιστοποίησης με περιοριστικές συνθήκες που προκαλούν κάποια πολυπλοκότητα.

Στη συνέχεια, δίνουμε ως παράδειγμα την Κανονική κατανομή που, ως γνωστόν, προσδιορίζεται από τις παραμέτρους μ και σ^2.

Παράδειγμα 5.9 Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X που περιγράφει το χαρακτηριστικό του πληθυσμού ακολουθεί την Κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu = \theta_1$ και $\sigma^2 = \theta_2$, δηλ. η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας έχει τη μορφή

$$f_X(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2p\theta_2}}\, exp\left\{-\frac{(x-\theta_1)^2}{2\theta_2}\right\}, \quad -\infty < \theta_1 < \infty, 0 < \theta_2 < \infty.$$

Υποθέτοντας ότι έχουμε στη διάθεσή μας ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από την κατανομή αυτή η συνάρτηση πιθανοφάνειας γράφεται

$$\begin{aligned} L(\theta_1,\theta_2) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2p\theta_2}}\, exp\left\{-\frac{(x_i-\theta_1)^2}{2\theta_2}\right\} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2p\theta_2}}\right)^n exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2}{2\theta_2}\right\}. \end{aligned}$$

Ισοδύναμα, θεωρούμε το λογάριθμο της συνάρτησης πιθανοφάνειας

$$\ln L(\theta_1,\theta_2) \;=\; -\frac{n}{2}\ln(2p\theta_2) \;-\; \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2}{2\theta_2}.$$

Οι μερικές παράγωγοι ως προς τις παραμέτρους θ_1, θ_2 μας δίνουν το σύστημα

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1} &= \frac{1}{\theta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1) \\ \frac{\partial \ln L(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2} &= \frac{-n}{2\theta_2} + \frac{1}{2\theta_2^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2. \end{aligned}$$

Από τη σχέση

$$\frac{\partial \ln L(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1} = 0 \quad \text{έχουμε τη λύση} \quad \theta_1 \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Όμοια από τη σχέση

$$\frac{\partial \ln L(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2} \;=\; 0 \quad \text{για} \quad \theta_1 \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

παίρνουμε

$$\theta_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2.$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης εύκολα διαπιστώνουμε ότι η παραπάνω λύση του συστήματος μεγιστοποιεί τη συνάρτηση πιθανοφάνειας.Άρα οι εκτιμήτριες μεγίστης πιθανοφάνειας είναι οι στατιστικές συναρτήσεις

$$\widehat{\theta}_1 \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{και} \quad \widehat{\theta}_2 = \;\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{\overline{X}})^2.$$

Παρατηρούμε ότι η εκτιμήτρια $\widehat{\theta}_2$ μεγίστης πιθανοφάνειας της διασποράς $\sigma^2 = \theta_2$ δεν είναι αμερόληπτη (βλ. παράδειγμα 5.2).

Παράδειγμα 5.10Ο χρόνος ζωής στοιχείων για μακρόχρονη χρήση είναι συνήθως πολύ μεγάλος. Για να ελέγξουν το χρόνο τους ακολουθείται η εξής διαδικασία: Ένα τυχαίο δείγμα n στοιχείων τίθενται σε λειτουργία και όταν r, $r < n$ από αυτά χαλάσουν τότε ο έλεγχος σταματάει. Είναι γνωστό ότι ο χρόνος ζωής, έστω X, ενός στοιχείου ακολουθεί την εκθετική κατανομή με άγνωστη παράμετρο θ. Επιθυμούμε να εκτιμήσουμε την παράμετρο στηριζόμενοι στους χρόνους ζωής, έστω $X_1, \ldots, X_r$ των πρώτων r στοιχείων που χάλασαν. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εκθετικής κατανομής είναι

$$f(x) \;=\; \theta e^{-\theta x}, \quad 0 \le x < \infty, \quad 0 < \theta < \infty.$$

Ανακαλώντας την ερμηνεία της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας έχουμε για τη συνάρτηση πιθανοφάνειας την εξής μορφή

$$L(\theta)\prod_{i=1}^{r} h_i = \mathbb{P}(x_i \le X_i < x_i + h_i,\, i = 1, \ldots, r \quad X_i > x_r,\, i = r+1, \ldots, n).$$

Διαιρώντας με το γινόμενο του αριστερού μέλους, παίρνοντας όρια για $h_i \to 0$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι την ανεξαρτησία και ισονομία των X_i, καθώς και ότι

$$\mathbb{P}(X_i > x_r) = 1 - \mathbb{P}(X_i \le x_r) = 1 - F(x_r) = R(x_r),$$

όπου F η συνάρτηση κατανομής και R η συνάρτηση αξιοπιστίας έχουμε:

$$\begin{aligned} L(\theta) \;&=\; \prod_{i=1}^{r} f(x_i|\theta) \;\prod_{r+1}^{n} R(x_r|\theta) \\ &=\; \prod_{i=1}^{r} \theta e^{-\theta x_i} \prod_{i=r+1}^{n} e^{-\theta x_r} \\ &=\; \theta^r \; e^{-\theta \sum_{i=1}^{r} x_i + (n-r)x_r}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα $\sum_{i=1}^{r} x_i + (n-r)x_r$ εκφράζει το συνολικό χρόνο ζωής του δείγματος. Ακολουθώντας τη συνήθη διαδικασία μεγιστοποίησης της συνάρτησης πιθανοφάνειας καταλήγουμε στην εξής στατιστική συνάρτηση που αποτελεί την εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας

$$\widehat{\theta} \;=\; \frac{r}{\sum_{i=1}^{r} X_i + (n-r)X_r}.$$

Αφού η μέση τιμή της εκθετικής είναι $\mathbb{E}[X] = 1/\theta$, συμπεραίνουμε ότι η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας της μέσης τιμής του πληθυσμού είναι ο συνολικός χρόνος ζωής του τυχαίου δείγματος διηρημένος με τον αριθμό των παρατηρηθεισών στοιχείων.

3. Διαστήματα Εμπιστοσύνης

Οι μέθοδοι εκτίμησης παραμέτρου του πληθυσμού που εξετάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο μας επιτρέπουν τον προσδιορισμό μιας σημειακής εκτίμησης, δηλ. μιας τιμής για την παράμετρο που μας ενδιαφέρει. Στις περισσότερες περιπτώσεις αυτή η εκτίμηση δεν συμπίπτει με την πραγματική τιμή της παραμέτρου. Οι "καλές" ιδιότητες της αντίστοιχης εκτιμήτριας μας εξασφαλίζουν μια καλή εκτίμηση. Συνεπώς, αξίζει να προσδιορισθεί ένα διάστημα με βάση την εκτίμηση μας και πόσο πιθανό είναι να βρίσκεται μέσα σε αυτό η πραγματική τιμή της παραμέτρου. Το διάστημα αυτό καλείται **διάστημα εμπιστοσύνης**. Έστω $\widehat{\Theta}$ η εκτιμήτρια της παραμέτρου θ. Αν η $\widehat{\Theta}$ ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\mathbb{P}(\widehat{\Theta} - \varepsilon_1 < \theta < \widehat{\Theta} + \varepsilon_2) = \gamma$$

τότε υποστηρίζουμε ότι το τυχαίο διάστημα $(\widehat{\Theta} - \varepsilon_1,\ \widehat{\Theta} + \varepsilon_2)$ είναι ένα $100 \times \gamma$ διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο θ. Η τιμή γ καλείται **συντελεστής εμπιστοσύνης** και επιλέγεται από τον εκάστοτε ερευνητή.Συνήθως τα διαστήματα είναι συμμετρικά, δηλ. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$.

Για την καλύτερη κατανόηση του διαστήματος εμπιστοσύνης απαιτείται να σκεφθούμε λίγο περισσότερο την παραπάνω πιθανότητα. Γνωρίζουμε ότι η $\widehat{\Theta}$ ως συνάρτηση των τυχαίων μεταβλητών $X_1, \ldots, X_n$ είναι μία στατιστική συνάρτηση, δηλ. είναι μία τυχαία μεταβλητή (η οποία για τις τιμές ενός συγκεκριμένου δείγματος $x_1, \ldots, x_n$ μας δίνει μία εκτίμηση $\widehat{\theta}$ της θ). Άρα τα άκρα του διαστήματος $(\widehat{\Theta} - \varepsilon_1,\ \widehat{\Theta} + \varepsilon_2)$ είναι τυχαίες μεταβλητές και έχει νόημα να υποστηρίζουμε ότι με πιθανότητα γ το διάστημα περιέχει την πραγματική τιμή θ της παραμέτρου. Χρησιμοποιώντας την ερμηνεία της πιθανότητας ως το όριο σχετικής συχνότητας θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε το εξής: Αν η διαδικασία της δειγματοληψίας επαναληφθεί πολλές φορές, δηλ. έχουμε πολλά δεδομένα τύπου $x_1, \ldots, x_n$, άρα και πολλά διαστήματα, τότε ο αριθμός αυτών που περιέχουν τη θ προς το σύνολο των διαστημάτων ισούται με γ. Το Σχήμα 5.1 δείχνει αυτό που αναλύσαμε για μια παράμετρο $\theta = 60cm$ και για 40 τυχαία δείγματα ίδιου μεγέθους. Παρατηρούμε ότι 2 διαστήματα δεν περιέχουν την τιμή της παραμέτρου.

Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε την κατανομή που ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή X, η οποία περιγράφει το χαρακτηριστικό του πληθυσμού για το οποίο ενδιαφερόμαστε. Τα βήματα που ακολουθούμε για να κατασκευάσουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης για κάποια άγνωστη παράμετρο θ της κατανομής από ένα τυχαίο δείγμα $X_1, \ldots, X_n$ είναι τα εξής:

• Προσδιορίζουμε τη στατιστική συνάρτηση $T = T(X_1, \ldots, X_n; \theta)$ για την οποία γνωρίζουμε την κατανομή που ακολουθεί.

• Προσδιορίζουμε τις τιμές ε_1 και ε_2, που είναι τέτοιες ώστε

$$\mathbb{P}(\varepsilon_1 \ < \ T \ < \ \varepsilon_2) \ = \ \gamma.$$

• Χρησιμοποιώντας τις τιμές του δείγματος υπολογίζουμε το εύρος των τιμών που μπορεί να πάρει η θ διατηρώντας τη συνθήκη

$$\varepsilon_1 \ < \ t(\theta) \ < \ \varepsilon_2,$$

όπου

$$t(\theta) \ = \ T(x_1, \ldots, x_n; \theta).$$

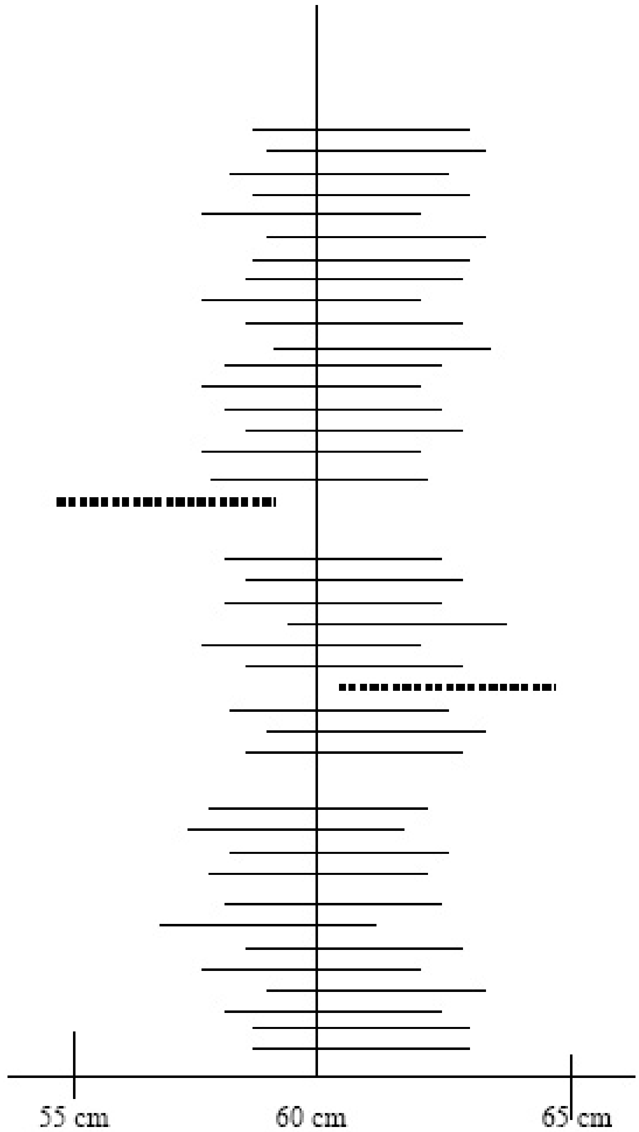
Αυτό το εύρος είναι ένα $100 \times \gamma\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο θ.

Τονίζουμε ότι τα παραπάνω ισχύουν όταν γνωρίζουμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε αναλυτικά την παραπάνω διαδικασία για γνωστές κατανομές.

5.3.1 Δειγματοληψία από Κανονική κατανομή

Έστω ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από πληθυσμό του οποίου το χαρακτηριστικό ακολουθεί την Κανονική κατανομή με άγνωστη μέση τιμή μ και γνωστή διασπορά σ^2, δηλ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Για να εκτιμήσουμε την παράμετρο μ χρησιμοποιούμε τη δειγματική μέση τιμή $\overline{X}$.

Είναι γνωστό (και εύκολο να αποδειχθεί) ότι η δειγματική μέση τιμή $\overline{X}$ ακολουθεί επίσης την Κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2/n.



Σχήμα 5.1: Απεικόνιση του τι σημαίνει ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης

Δηλ. $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$. Άρα η τυποποιημένη τυχαία μεταβλητή

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{\mu}} \quad \text{ακολουθεί την} \quad N(0,\ 1),$$

όπου $N(0,\ 1)$ είναι η τυποποιημένη Κανονική κατανομή. Επομένως, το πρώτο βήμα έχει επιτευχθεί, αφού γνωρίζουμε την κατανομή της στατιστικής συνάρτησης που θα χρησιμοποιήσουμε.

Για το δεύτερο βήμα, με τη βοήθεια του πίνακα τιμών της τυποποιημένης Κανονικής εντοπίζουμε τις τιμές ε_1 και ε_2 για τις οποίες ισχύει

$$\mathbb{P}(\varepsilon_1 < Z < \varepsilon_2) = \gamma$$

Συνήθως οι τιμές του γ είναι 0.90, 0.95, 0.99, που σημαίνει ότι με μεγάλη πιθανότητα θέλουμε η πραγματική τιμή της παραμέτρου να βρίσκεται στο διάστημα μας.

Γνωρίζοντας τα ε_1, ε_2, καθώς και τις τιμές του δείγματος από τη σχέση

$$\varepsilon_1 < \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \varepsilon_2$$

παίρνουμε το εξής διάστημα

$$\overline{x} - \frac{\varepsilon_2 \sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} - \frac{\varepsilon_1 \sigma}{\sqrt{n}}$$

Έτσι, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το διάστημα $(\overline{x} - \frac{\varepsilon_2\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} - \frac{\varepsilon_1\sigma}{\sqrt{n}})$ είναι ένα $100 \times \gamma\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για την άγνωστη μέση τιμή μ του πληθυσμού.

Πολλές φορές ενδιαφερόμαστε να συγκρίνουμε τις μέσες τιμές δύο Κανονικών κατανομών και να δώσουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά τους. Αυτό επιτυγχάνεται ώς εξής: Έστω ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n, $X_1, \ldots, X_n$ από πληθυσμό του οποίου το χαρακτηριστικό ακολουθεί την Κανονική κατανομή με άγνωστη μέση τιμή μ_X και γνωστή διασπορά σ_X^2, δηλ. $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$. Όμοια, έστω το δείγμα $Y_1, \ldots, Y_m$, από την Κανονική κατανομή με άγνωστη μ_Y και γνωστή διασπορά σ_Y^2. Έστω οι δειγματικές μέσες τιμές $\overline{X}$, $\overline{Y}$. Η στατιστική συνάρτηση που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η διαφορά τους $\overline{X} - \overline{Y}$, η οποία γνωρίζουμε ότι ακολουθεί την $N(\mu_X - \mu_Y, \sigma_X^2/n + \sigma_Y^2/m)$. Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε για ένα διάστημα εμπιστοσύνης $100\gamma\%$ τη σχέση

$$P\left[-z_{\alpha/2} \leq \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_X^2/n + \sigma_Y^2/m}} \leq z_{\alpha/2}\right] = \gamma,$$

ή

$$P\left[(\overline{X} - \overline{Y}) - z_{\alpha/2}\sigma^2_{\overline{X}-\overline{Y}} \leq \mu_X - \mu_Y \leq (\overline{X} - \overline{Y}) + z_{\alpha/2}\sigma^2_{\overline{X}-\overline{Y}}\right] = \gamma$$

όπου $\sigma^2_{\overline{X}-\overline{Y}} = \sqrt{\sigma^2_X/n + \sigma^2_Y/m}$.

Από τις παρατηρήσεις μας υπολογίζουμε τα $\overline{x}, \overline{y}$ και παίρνουμε το $\gamma\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων

$$\left[(\overline{x}-\overline{y}) - z_{\alpha/2}\sigma^2_{\overline{X}-\overline{Y}}, \quad (\overline{x}-\overline{y}) + z_{\alpha/2}\sigma^2_{\overline{X}-\overline{Y}}\right].$$

Παράδειγμα 5.11 Έστω ότι οι βαθμοί στο μάθημα Πιθανότητες-Στατιστική ακολουθούν την Κανονική κατανομή με άγνωστες μέσες τιμές και διασπορές $\sigma^2_X = 4$, $\sigma^2_Y = 6.25$ ως προς τα τμήματα Γεωλογίας(X) και Φυσικής(Y). Για δείγματα 36 και 40 γραπτών από τα τμήματα Γεωλογίας και Φυσικής αντίστοιχα έχουμε $\overline{x} = 5.5, \overline{y} = 6$. Σύμφωνα με τα δεδομένα έχουμε

$$\sigma^2_{\overline{X}-\overline{Y}} = \sqrt{\sigma^2_X/n + \sigma^2_Y/m} = \sqrt{4/36 + 6.25/40} = 0.517.$$

Άρα ενα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων είναι το ακόλουθο:

$$[(5.5-6) - z_{0.25}0., 517, \quad (5.5-6) + z_{0.25}0.517]$$

ή

$$(-0.5 - 1.96 \cdot 0.517, \quad -0.5 + 1.96 \cdot 0.517) \quad ή \quad (-1.513 \quad 0.5133).$$

Παράδειγμα 5.12 Όπως ήδη αναφέραμε, το σύνηθες είναι να θεωρούμε συμμετρικά διαστήματα, δηλ. συμμετρικό διάστημα ως προς το μ, το οποίο συνεπάγεται ότι $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = -\varepsilon$. Επιπλέον, στην περίπτωση αυτή η κατανομή της Z είναι συμμετρική και έχουμε

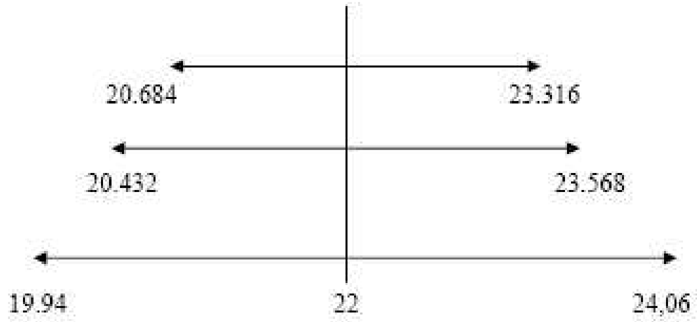
$$\mathbb{P}(-\varepsilon \ < \ Z \ < \ \varepsilon) \ = \ \gamma$$

και θέτοντας $\gamma = 1 - \alpha$ παίρνουμε

$$\mathbb{P}(Z \ < \ -\varepsilon) \ = \ \frac{\alpha}{2} \quad \text{και} \quad \mathbb{P}(Z \ > \ \varepsilon) \ = \ \frac{\alpha}{2}$$

Η τιμή του ε δηλώνεται συνήθως με $z_{\alpha/2}$ και τη βρίσκουμε στους πίνακες τις τυποποιημένης Κανονικής. Συνεπώς, το $100(1-\alpha)$ τοις εκατό διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μ του πληθυσμού γράφεται

$$\left(\overline{x} \ - \ z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \overline{x} \ + \ z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$



Σχήμα 5.2: Διαστήματα εμπιστοσύνης 90%, 95% και 99% αντίστοιχα

Στις εφαρμογές τις περισσότερες φορές χρησιμοποιούμε τις τιμές που δίνουμε στον παρακάτω πίνακα:

$1-\alpha=\gamma$	0.90	0.95	0.99
$z_{\alpha/2}$	1.645	1.96	2.579

Στο Σχήμα 5.2 διευκρινίζονται τα παραπάνω.

Στο $100(1-\alpha)$ διάστημα εμπιστοσύνης που κατασκευάσαμε, η δειγματική μέση τιμή $\overline{X}$ αποκλίνει της μέσης τιμής του πληθυσμού λιγότερο από $\Delta = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Αυτό σημαίνει ότι για να κατασκευάσουμε ένα συμμετρικό $100(1-\alpha)$ διάστημα εμπιστοσύνης πλάτους 2Δ για τη μέση τιμή του πληθυσμού το μέγεθος του δείγματος πρέπει να είναι

$$n \;=\; \left[(z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\Delta})^2\right].$$

Παράδειγμα 5.13 Ο χρόνος διεκπεραίωσης ενός προγράμματος από έναν Η/Υ είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την Κανονική κατανομή με $\sigma^2 = 2.25\text{sec}^2$ και άγνωστη μέση τιμή μ. Για να εκτιμηθεί η παράμετρος μ εκτελείται το πρόγραμμα αυτό 36 φορές και δίνει μέσο χρόνο $\overline{x} = 2\text{sec}$. Υποθέτοντας ότι οι εκτελέσεις του προγράμματος είναι ανεξάρτητες η μία της άλλης ένα 95 τοις εκατό διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο μ είναι

$$(2-1.96\frac{1.5}{\sqrt{36}}, \quad 2+1.96\frac{1.5}{\sqrt{36}}) \;=\; (1,51,\; 2,49).$$

Έστω ότι επιθυμούμε να προσδιορίσουμε το μέγεθος του δείγματος, δηλ. τον αριθμό διεκπεραίωσης του συγκεκριμένου προγράμματος, έτσι ώστε με συντελεστή εμπιστοσύνης 99 τοις εκατό η εκτίμησή μας να διαφέρει από την πραγματική παράμετρο μ κατά 0,5 sec. Ο αριθμός αυτός είναι

$$n \;=\; \left[(z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\Delta})^2\right] = \left[(\frac{2.576\times 1.5}{0,5})^2\right] \;=\; 60.$$

Σημειώνουμε ότι στο δεύτερο ερώτημα το μέγεθος του δείγματος που απαιτείται είναι πολύ μεγαλύτερο από αυτό του πρώτου, κάτι αναμενόμενο αφού ζητάμε κάτι με μεγαλύτερο συντελεστή εμπιστοσύνης.

Παράδειγμα 5.14 Έστω ότι το σήμα που εκπέμπεται από το σταθμό Α έχει ένταση μ, ενώ η ένταση του ίδιου σήματος που καταγράφεται από το σταθμό Β, λόγω θορύβου, είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την Κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση $\sigma = 4$. Για να ελαττωθεί το σφάλμα, το ίδιο σήμα καταγράφεται 25 φορές (δηλ. έχουμε 25 ανεξάρτητα πειράματα) και οι εντάσεις του μας δίνουν δειγματικό μέσο $\overline{x} = 22$.

• Ένα 90 τοις εκατό διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο μ είναι το ακόλουθο:

$$(22 \;-\; 1.645\frac{4}{\sqrt{25}}, \quad 22 \;+\; 1.645\frac{4}{\sqrt{25}}) = (20.684, \quad 23,316)$$

• Ένα 95 τοις εκατό διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο μ είναι το ακόλουθο:

$$(22 \;-\; 1.96\frac{4}{\sqrt{25}}, \quad 22 \;+\; 1.96\frac{4}{\sqrt{25}}) = (20.432, \quad 23,568)$$

• Ένα 99 τοις εκατό διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο μ είναι το ακόλουθο:

$$(22 \;-\; 2.576\frac{4}{\sqrt{25}}, \quad 22 \;+\; 2.576\frac{4}{\sqrt{25}}) = (19.94, \quad 24.06)$$

Από το Σχήμα 5.2 φαίνεται ότι όσο πιο μεγάλος είναι ο συντελεστής εμπιστοσύνης τόσο πιο μεγάλο είναι το διάστημα, κάτι αναμενόμενο, αφού μεγαλώνοντας την πιθανότητα να περιέχεται η άγνωστη παράμετρος στο διάστημα πρέπει να μεγαλώνει και το διάστημα.

Δύο σημαντικά προβλήματα προκύπτουν από τις υποθέσεις που κάναμε έως τώρα και είναι οι ακόλουθες:

Α: Η κατανομή της παραμέτρου του πληθυσμού δεν είναι πάντα Κανονική. Συνεπώς πρέπει να εξετασθούν και περιπτώσεις άλλων κατανομών. Γνωρίζουμε όμως από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα ότι η στατιστική συνάρτηση

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

ακολουθεί ασυμπτωτικά την Κανονική κατανομή όταν το μέγεθος του δείγματος είναι αρκετά μεγάλο. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να επικαλούμαστε την υπόθεση της Κανονικής κατανομής για μεγάλα δείγματα.

B: Η δεύτερη δυσκολία εμφανίζεται όταν η διασπορά σ^2 της κατανομής της άγνωστης παραμέτρου δεν είναι γνωστή. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εκτίμησή της από το δείγμα s^2 για να κατασκευάσουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης

$$\overline{x} \; - \; z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \; < \; \mu \; < \; \overline{x} \; + \; z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}},$$

το οποίο είναι μια καλή προσέγγιση για μεγάλο n και οπωσδήποτε για $n > 30$.

Στην περίπτωση που το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό η παραπάνω προσέγγιση δεν είναι καλή και τότε χρησιμοποιούμε την κατανομή t ή κατανομή Student. (βλ. κεφ.3). Υπενθυμίζουμε τον ορισμό της: Αν $\overline{X}$ είναι η δειγματική μέση τιμή από κατανομή πληθυσμού που ακολουθεί την Κανονική κατανομή με n και μ σ^2, τότε η τυχαία μεταβλητή (στην περίπτωσή μας η στατιστική συνάρτηση)

$$T \; = \; \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{\mu}}$$

ακολουθεί την κατανομή Student με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας. Η γραφική παράσταση της είναι παρόμοια με αυτή της Κανονικής κατανομής με περισσότερη πυκνότητα στις ουρές, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Για συγκεκριμένες τιμές μπορούμε να ανατρέξουμε στον πίνακα VI του Παραρτήματος.

Το διάστημα εμπιστοσύνης στην περίπτωση αυτή έχει τη μορφή

$$\overline{x} \; - \; t_{n-1;\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \; < \mu < \; \overline{x} \; + \; t_{n-1;\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Παράδειγμα 5.15 Έστω ότι για λόγους τεχνικούς θέλουμε να εκτιμήσουμε το μέσο χρόνο εκτέλεσης ενός εργαστηρίου από μεταπτυχιακούς φοιτητες του τμήματος Φυσικής. Είναι γνωστό ότι ο χρόνος αυτός ακολουθεί την Κανονική κατανομή με άγνωστη μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Ένα τυχαίο δείγμα από αυτούς μας δίνει δειγματική μέση τιμή $\overline{x} = 240$min και δειγματική τυπική απόκλιση $s = 15$min. Για να έχουμε ένα 98 τοις εκατό διάστημα εμπιστοσύνης για τον πραγματικό μέσο χρόνο χρειαζόμαστε την τιμή της $t_{5;0.01}$. Από τον Πίνακα VI του Παραρτήματος βρίσκουμε ότι η τιμή αυτή είναι 3.365. Άρα το ζητούμενο διάστημα είναι

$$\begin{aligned}(\overline{x} \ - t_{5;\ 0.01}\frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} \ + t_{5;\ 0.01}\frac{s}{\sqrt{n}}) \\ &= (240 \ - 3.365\frac{15}{\sqrt{6}},\ 240 \ + 3.365\frac{15}{\sqrt{6}}) \\ &= (219.40, \quad 260.60).\end{aligned}$$

Παρατήρηση: Αν γνωρίζαμε ότι η πραγματική τιμή της τυπικής απόκλισης ήταν $\sigma = 15$, τότε το 98 τοις εκατό διάστημα εμπιστοσύνης θα ήταν

$$\begin{aligned}(\overline{x} \ - \ z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \overline{x} \ + \ z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) &= (240 \ - \ 2.33\frac{15}{\sqrt{6}}, \quad 240 \ + \ 2.33\frac{15}{\sqrt{6}}) \\ &= (225.73, \quad 254,26).\end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τα δύο διαστήματα παρατηρούμε ότι το δεύτερο είναι μικρότερο όπως ήταν αναμενόμενο.

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με διαστήματα εμπιστοσύνης που αφορούν τη μέση τιμή του πληθυσμού. Στη συνέχεια, θα αναφέρουμε την περίπτωση που επιθυμούμε να κατασκευάσουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης για τη διασπορά του χαρακτηριστικού X του πληθυσμού στην περίπτωση που η κατανομή του είναι η Κανονική. Στην περίπτωση αυτή μπορεί να αποδειχθεί ότι η στατιστική συνάρτηση που βασίζεται σε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n

$$X^2_{n-1} \ = \ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2},$$

όπου η S^2 είναι η δειγματική διασπορά, ακολουθεί τη κατανομή χ^2_{n-1} $n-1$. Τιμές της κατανομής αυτής για διάφορες τιμές του n, που συνήθως αναφέρεται χ-τετράγωνο κατανομή με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας υπάρχουν στον πίνακα VII του Παραρτήματος.

Από τον πίνακα αυτό προσδιορίζουμε τους αριθμούς ε_1 και ε_2 που είναι τέτοιοι ώστε να έχουμε το επόμενο $100(1-\alpha)$ τοις εκατό διάστημα εμπιστοσύνης

$$\mathbb{P}\left[\varepsilon_1 \ < \ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \ < \ \varepsilon_2\right] \ = \ 1-\alpha.$$

Είναι φανερό ότι η τυχαία μεταβλητή χ^2_{n-1} από τον ορισμό της παίρνει μη αρνητικές τιμές και άρα δεν είναι συμμετρική ως προς το 0, όπως συμβαίνει με την Κανονική κατανομή. Στην περίπτωση αυτή, οι αριθμοι ε_1, ε_2 επιλέγονται έτσι ώστε να ισχύουν τα εξής:

$$\mathbb{P}(X^2_{n-1} > \varepsilon_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{και} \quad \mathbb{P}(X^2_{n-1} < \varepsilon_1) = \frac{\alpha}{2}.$$

Δηλ. οι αριθμοί ε_1 και ε_2 είναι αντίστοιχα οι τιμές $\chi^2_{n-1;\ \alpha/2}$ kai $\chi^2_{n-1;\ 1-\alpha/2}$. Συνεπώς, ένα $100(1-\alpha)$ τοις εκατό διάστημα εμπιστοσύνης για τη διασπορά δίνεται από τη σχέση

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1;\ \alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1;\ 1-\alpha/2}}.$$

Σημειώνουμε ότι όπως συμβαίνει και με την κατανομή t, έτσι και στην περίπτωση της χ-τετράγωνο το διάστημα δεν απαιτεί τη γνώση κάποιας παραμέτρου της κατανομής.

Παράδειγμα 5.16 Προκειμένου να αναβαθμισθεί το σύστημα ενδοεπικοινωνίας ενός συστήματος, για τις καθυστερήσεις του οποίου έχουν καταγραφεί σχετικά παράπονα, η εταιρεία σχεδιασμού επιθυμεί να κατασκευάσει ένα 95 τοις εκατό διάστημα εμπιστοσύνης για τη διασπορά του χρόνου ανταπόκρισης. Υποθέτοντας ότι ο χρόνος ανταπόκρισης ακολουθεί την Κανονική κατανομή ένα τυχαίο δείγμα 30 χρόνων καταγράφεται και υπολογίζεται η δειγματική διασπορά. Αν $s^2 = 25$ sec^2, τότε το ζητούμενο διάστημα είναι

$$(\frac{29\cdot 25}{45.722} < \sigma^2 < \frac{29\cdot 25}{16.047}) = (15.86 < \sigma^2 < 45.18).$$

Σημειώνουμε ότι η υπόθεση της Κανονικότητας της κατανομής είναι απαραίτητα στην περίπτωση εκτίμησης της διασποράς, κάτι που δεν ισχύει για τη μέση τιμή η οποία μπορεί να εκτιμηθεί από τη στατιστική συνάρτηση $\frac{(\overline{X}-\mu)}{\sigma/\sqrt{n}}$ πολύ ικανοποιητικά κάτω από συνθήκες, όπως είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο.

5.3.2 Δειγματοληψία από Εκθετική κατανομή

Έστω ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από πληθυσμό του οποίου το χαρακτηριστικό ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παράμετρο θ άγνωστη. Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή της εκθετικής είναι $\mu = 1/\theta$ και η διασπορά της $\sigma^2 = 1/\theta^2$. Στο παράδειγμα 5.8 δείξαμε ότι η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας της παράμετρου μ είναι η δειγματική μέση τιμή $\overline{X}$. Έχουμε επομένως τη στατιστική συνάρτηση

$$T = T(X_1,\dots,X_n;\theta) = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

της οποίας πρέπει να προσδιορίσουμε την κατανομή. Σκεφτόμαστε ως εξής: Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα n ανεξαρτήτων εκθετικών με παράμετρο θ ακολουθεί την κατανομή Erlang με παραμέτρους n, θ. Αυτό συνεπάγεται ότι η

$$2n\theta\overline{X} = \frac{2n\overline{X}}{\mu} = \frac{2nT}{\mu}$$

κατανέμεται ως κατανομή Γάμμα (βλ. Κεφάλαιο 2) με παραμέτρους n και $1/2$, η οποία είναι η χ^2 κατανομή με $2n$ βαθμούς ελευθερίας. Άρα ένα $100(1-\alpha)$ τοις εκατό διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή του πληθυσμού μ κατασκευάζεται από τη σχέση

$$\chi^2_{2n;\ 1-\alpha/2} \ < \ \frac{2nt(\widehat{\theta})}{\mu} \ < \ \chi^2_{2n;\ \alpha/2}$$

και είναι

$$\left(t(\widehat{\theta})\frac{2n}{\chi^2_{2n;\ \alpha/2}} \ < \mu < \ t(\widehat{\theta})\frac{2n}{\chi^2_{2n;\ 1-\alpha/2}} \right),$$

όπου η $t(\widehat{\theta})$ είναι η εκτίμηση.

Παράδειγμα 5.17 Ο χρόνος ζωής μιας λυχνίας ορισμένου τύπου ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο θ. Ένα τυχαίο δείγμα 10 λυχνιών δίνει μέσο χρόνο ζωής 10,000 ώρες. Ένα 90 τοις εκατό διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή του πληθυσμού είναι

$$(10,000\frac{2\cdot 10}{\chi^2_{20;\ 0.10/2}} \ < \mu = \frac{1}{\theta} \ < 10,000\frac{2\cdot 10}{\chi^2_{20;\ 0.95/2}})$$

ή

$$(6,367.40 \ < \mu = \frac{1}{\theta} \ < \ 18,431.49)$$

5.3.3 Δειγματοληψία από κατανομή Poisson

Θεωρώντας μία διαδικασία Poisson παραμέτρου λ γνωρίζουμε ότι οι χρόνοι $X_i,\ i=1,2,\ldots$ μεταξύ δύο διαδοχικών γεγονότων, τους οποίους οναμάζουμε ενδιάμεσους, είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Υποθέτοντας ότι παρακολουθούμε τη διαδικασία έως ότου συμβούν n γεγονότα επιθυμούμε να εκτιμήσουμε την παράμετρο λ . Γνωρίζουμε ότι η στατιστική συνάρτηση

$$S_n \ = \ \sum_{i=1}^{n}$$

ακολουθεί την κατανομή Erlang με παραμέτρους n, λ, άρα η στατιστική συνάρτηση $2\lambda S_n$ ακολουθεί την κατανομή χ^2 με $2n$ βαθμούς ελευθερίας. Συνεπώς από τη σχέση

$$\left(\frac{\chi^2_{2n;\ 1-\alpha/2}}{2s_n} \ < \lambda < \ \frac{\chi^2_{2n;\ \alpha/2}}{2s_n} \right)$$

προσδιορίζεται ένα $100(1-\alpha)$ διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο λ της Poisson. Υπενθυμίζουμε ότι η λ είναι ο ρυθμός με τον οποίο συμβαίνουν τα γεγονότα, για το λόγο αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία.

Παράδειγμα 5.17 Οι αφίξεις ραδιενεργών σωματιδίων σε ένα μετρητή ακολουθούν την κατανομή με άγνωστη παράμετρο την οποία θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα 90 τοις εκατό διάστημα εμπιστοσύνης. Παρακολουθείται η εκπομπή 50 σωματιδίων και παρατηρείται ότι αυτά καταγράφονται σε χρονικό διάστημα 10 sec. Έχουμε δηλ. $\lambda = 5$ σωματίδια/sec. Άρα το ζητούμενο διάστημα είναι

$$\begin{aligned}\left(\frac{\chi^2_{2\cdot 50;\ 1-0.1/2}}{2\cdot 10} < \lambda < \frac{\chi^2_{2\cdot 50;\ 0.1/2}}{2\cdot 10}\right) &= \left(\frac{\chi^2_{100;\ 0.95}}{20} < \lambda < \frac{\chi^2_{100;\ 0.5}}{20}\right)\\ &= (3.89 \ < \ \lambda \ < \ 6.217).\end{aligned}$$

5.3.4 Δειγματοληψία από κατανομή Bernoulli

Ας υποθέσουμε ότι η Διοίκηση του Πανεπιστημίου Αθηνών προκειμένου να αποφασίσει για αλλαγές στην εξεταστική διαδικασία επιθυμεί να έχει ένα διάστημα εμπιστοσύνης για το ποσοστό, έστω p των φοιτητών που συμφωνούν. Κάθε φοιτητής αντιπροσωπεύεται από μια τυχαία μεταβλητή $X_i, i = 1.2, \ldots$ που ακολουθεί την κατανομή Bernoulli, δηλ. παίρνει την τιμή 1 με πιθανότητα p αν συμφωνεί και 0 με πιθανότητα $q = 1-p$ αν όχι. Για το σκοπό αυτό ένα τυχαίο δείγμα μεγέθου n λαμβάνεται από τον πληθυσμό των φοιτητών του Πανεπιστημίου.Η στατιστική συνάρτηση

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

ακολουθεί, ως γνωστό, την Διωνυμική κατανομή. Στην παράγραφο 5.2.1 είδαμε ότι η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου p είναι η

$$\widehat{P} \ = \ \frac{S_n}{n} \ = \ \overline{X}.$$

Γνωρίζουμε ότι $\mathbb{E}[S_n] = np$ και $\mathrm{Var}\,[S_n] = np(1-p)$. Άρα $\mathbb{E}[\widehat{P}] = p$ και $\mathrm{Var}\,[\widehat{P}] = p(1-p)/n$, το οποίο σημαίνει το δειγματικό ποσοστό, $\widehat{P}$, είναι αμερόληπτη και συνεπής εκτιμήτρια του πραγματικού ποσοστού p.

Όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο ή το ποσοστό p υποπτευόμαστε ότι δεν είναι κοντά στο 0 ή στο 1, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η Διωνυμική κατανομή που ακολουθεί η στατιστική συνάρτηση S_n προσεγγίζεται από την Κανονική κατανομή με $\mu = np$, $\sigma^2 = np(1-p)$. Συνήθως οι συνθήκες προσέγγισης εκφράζονται από τις σχέσεις $np \geq 5$, $nq \geq 5$.. Επίσης, η άγνωστη παράμετρος σ^2 μπορεί να προσεγγισθεί από τη $\widehat{\sigma}^2 = n\widehat{p}(1-\widehat{p})$. Κάτω από τις παραπάνω συνθήκες η

$$\frac{S_n - np}{\widehat{\sigma}}$$

ακολουθεί την τυποποιημένη Κανονική κατανομή. Άρα ένα $100(1-\alpha)$ διάστημα εμπιστοσύνης για το ποσοστό p προσδιορίζεται από τη σχέση

$$-z_{\alpha/2} < \frac{S_n - np}{\widehat{\sigma}} < z_{\alpha/2}$$

ή

$$\frac{s_n}{n} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_n(1-\frac{s_n}{n})}{n^2}} < p < \frac{s_n}{n} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_n(1-\frac{s_n}{n})}{n^2}},$$

όπου s_n η εκτίμηση που έχουμε από το τυχαίο δείγμα. Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί πιο συνοπτικά ως

$$\widehat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}} < p < \widehat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}.$$

Επιστρέφοντας στο συγκεκριμένο παράδειγμα, έστω ότι το τυχαίο δείγμα είναι μεγέθους $n = 100$ και οι φοιτητές που υποστηρίζουν τις συγκεκριμένες αλλαγές είναι $s_100 = 40$. Τότε ένα 95 τοις εκατό διάστημα εμπιστοσύνης για το πραγματικό ποσοστό είναι

$$\left(40/100 - 1.96\sqrt{\frac{40(1-\frac{40}{100})}{100^2}} < p < 40/100 + 1.96\sqrt{\frac{40(1-\frac{40}{100})}{100^2}}\right)$$

$$= (0.353 < p < 0.447).$$

Παράδειγμα 5.18 (Υποθετικό) Έστω ότι το Υπουργείο Περιβάλλοντος και Δημοσίων Έργων ανακοινώνει ότι σε μια δημοσκόπιση που έγινε με σκοπό να ληφθούν μέτρα για την ατμοσφαιρική ρύπανση στην λεκανοπέδιο της Αττικής το 58 τοις εκατό των κατοίκων συμφωνεί με αυτά με περιθώριο λάθους ± 3 τοις εκατό. Τι σημαίνει αυτή η δήλωση; Μπορούμε να υπολογίσουμε πόσοι κάτοικοι ρωτήθηκαν γι᾿αυτό το θέμα;

Στο παράδειγμα αυτό δεν αναφέρεται ο συντελεστής εμπιστοσύνης. Όμως είναι κοινή πρακτική να παρουσιάζονται 95 τοις εκατό διαστήματα εμπιστοσύνης, εκτός αν διευκρινίζεται διαφορετικά. Επομένως, έχουμε ένα 95 τοις εκατό διάστημα εμπιστοσύνης για το άγνωστο ποσοστό p των πολιτών που υποστηρίζουν τη λήψη μέτρων από το σχετικό Υπουργείο, το οποίο δίνεται από τον τύπο

$$0.58 - 1.96\sqrt{\frac{0.58 \cdot 0.42}{n}} \ < p < \ 0.58 + 1.96\sqrt{\frac{0.58 \cdot 0.42}{n}}.$$

Από το ότι το σφάλμα είναι $\pm 0,03$ έχουμε ότι

$$1.96\sqrt{\frac{0.58 \cdot 0.42}{n}} = 0.03,$$

το οποίο μας δίνει τον αριθμό των ερωτηθέτων

$$n = \frac{(1.96^2)(0.58)(0.42)}{(0.03^2)} = 1040$$

Με βάση τα παραπάνω ισχυριζόμαστε ότι: "ρωτήθηκαν περίπου 1040 άτομα και το 58 τοις εκατό αυτών των ατόμων συμφωνεί με τη λήψη μέτρων για την αντιμετώπιση της ατμοσφαιρικής ρύπανσης"

Ασκήσεις

1. Δέκα στοιχεία ενός συστήματος ελέγχονται ως προς το χρόνο ζωής τους με τη μέθοδο της εξάντλησης και οι παρατηρούμενοι χρόνοι ζωής τους σε ώρες είναι: 1200, 1500, 1625, 1725, 1750, 1785, 1800, 1865, 1900, 1950. Υποθέτοντας ότι ο χρόνος ζωής των συγκεκριμένων στοιχείων ακολουθεί την Κανονική κατανομή να υπολογισθεί μια εκτίμηση για το μέσο χρόνο ζωής, καθώς και για τη διασπορά. Να κατασκευασθεί ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο χρόνο ζωής.

2. Σε ένα υπολογιστικό κέντρο δημιουργείται ουρά εργασιών που περιμένουν για διεκπεραίωση. Τα παρακάτω δεδομένα αφορούν σε 20 μετρήσεις μέσου μήκους της ουράς. Με βάση αυτά να προσδιορισθούν οι καλύτερες εκτιμήτριες για το μέσο μήκος και τη διασπορά της ουράς, καθώς και ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο μήκος.

3	2.87	3.58	3.28	3.87
4.14	5.23	3.86	2.88	4.37
4.75	4.33	3.17	2.85	4.16
4.03	3.57	3.68	3.95	3.58

Υποθέστε ότι το μήκος της ουράς ακολουθεί προσεγγιστικά την Κανονική κατανομή.

3. α) Ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους ν $X_1, \ldots, X_\nu$ λαμβάνεται από την κατανομή Poisson με παράμετρο λ, $0 < \lambda < \infty$. Να δειχθεί ότι η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου λ είναι $\widehat{\lambda} = \overline{X}$.
β) Έστω X ο αριθμός συγκεκριμένων ελαττωμάτων που παρουσιάζονται σε ταινία υπολογιστή ανά 100 μέτρα. Υποθέτουμε ότι η X είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ. Έστω ότι 40 ταινίες των 100 μέτρων εξετάζονται και μας δίνουν τα εξής αποτελέσματα ως προς το συγκεκριμένο ελάττωμα: 5 μας δίνουν 0, 7 μας δίνουν 1, 12 μας δίνουν 2, 9 μας δίνουν 3, 5 μας δίνουν 4, 1 μας δίνει 5 και 1 μας δίνει 6. Να υπολογισθεί η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας της λ.

4. Η ζωή μιας ηλεκτρονικής λυχνίας ακολουθεί την Κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση $\sigma = 400$ ώρες. Ένα δείγμα 20 τέτοιων λυχνιών ελέγχονται και μας δίνουν μέσο χρόνο ζωής 9000 ώρες. Να κατασκευασθεί ένα: α) 90%, β)95% διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο χρόνο ζωής μιας τέτοιας λυχνίας.

5. Ο χρόνος ζωής σε ώρες, έστω X, των λυχνιών που παράγει η εταιρία A ακολουθεί την Κανονική κατανομή με μ_X και $\sigma^2_{\mathrm{X}} = 784$, ενώ ο χρόνος ζωής σε ώρες, έστω Y, των λυχνιών που παράγει η εταιρία B ακολουθεί την Κανονική κατανομή με μ_X και $\sigma^2_{\mathrm{Y}} = 648$. Οι παραγωγές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Ένα δείγμα μεγέθους $n = 56$ από την παραγωγή της εταιρίας A μας δίνει $\overline{x} = 937,5$, ενώ ένα δείγμα μεγέθους $m = 57$ από την εταιρία B μας δίνει $\overline{y} = 988,9$. Να υπολογισθεί ένα α) 90%, β)99% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων $\mu_X - \mu_Y$.

6. Είκοσι φοιτητές μετρούν το σημείο τήξης μολύβδου. Τα αποτελέσματα τους έδωσαν μέση θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου και τυπική απόκλιση 330,2 και 15,4 αντίστοιχα. Να κατασκευασθούν διαστήματα εμπιστοσύνης α)90% , β)95% για τη μέση θερμοκρασία τήξης.

7. Σε μια περιοχή της Αττικής οι κάτοικοι ανησυχούν για συγκέντρωση μονοξειδίου του άνθρακα κατά τις μεσημεριανές ώρες. Η υπεύθυνη υπηρεσία κάνει 16 τυχαίες παρατηρήσεις κατά τις ώρες αυτές που δίνουν τις εξής τιμές σε mg/m^3: 33, 25, 37, 45, 64, 55, 35, 40, 44, 36, 60, 58, 39, 70, 65, 72. Με δεδομένο ότι το επιτρεπτό όριο έκθεσης σε μονοξείδιο του άνθρακα είναι 55mg/m^3 τι νομίζετε ότι πρέπει να ανακοινώσουν στους κατοίκους ως προς το μέση τιμή του ρύπου σε επίπεδο σημαντικότητας 95%;

8. Ένα τυχαίο δείγμα 100 πτυχιούχων της Σχολής Θετικών Επιστημών ρωτήθηκαν αμέσως μετά την ορκωμοσία τους κατά τη λήψη του πτυχίου αν είναι αισιόδοξοι για το επαγγελματικό τους μέλλον. Το 32% απάντησαν θετικά. Να κατασκευασθεί ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνη για το πραγματικό ποσοστό αισιόδοξων πτυχιούχων της Σχολής.

9. Μια εταιρία παραγωγής ηλεκτρονικών προιόντων θέλει να κάνει μια έρευνα αγοράς ως προς πόσοι βλέπουν στην τηλεόραση συγκεκριμένη διαφήμιση της. Για το σκοπό αυτό, η ομάδα που έχει αυτή την ευθύνη επιλέγει τυχαία από τον τηλεφωνικό κατάλογο άτομα τα οποία ρωτάει σχετικά με τη διαφήμηση.
α) Πόσους πρέπει να ρωτήσουν έτσι ώστε σε επίπεδο σημαντικότητας 90% η εκτίμηση του ποσοστού να είναι σωστή $\pm 0,02$;
β) Θεωρείστε ως μέγεθος δείγματος αυτό που προσδιορίζεται από το. α) Έστω ότι το 24% βλέπει τη συγκεκριμένη διαφήμηση. Κατασκευάστε ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το πραγματικό ποσοστό.

10. Έστω ότι το πανεπιστήμιο Αθηνών θέλει να γνωρίζει το ποσοστό των φοιτητριών. Ένα τυχαίο δείγμα 1000 Α.Μ.(αριθμών μητρώου) λαμβάνονται και διαπιστώνεται ότι 416 ανήκουν σε φοιτήτριες. Να κατασκευασθεί ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το πραγματικό ποσοστό. Έστω ότι η διοίκηση του πανεπιστημίου επιθυμεί ένα 99% διάστημα εμπιστοσύνης τέτοιο ώστε το μήκος του διαστήματος να είναι το πολύ 0,03. Πόσο μεγάλο τυχαίο δείγμα πρέπει να ληφθεί;

Παράρτημα

Πίνακες Πιθανοτήτων

Πίνακας I: Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

Διακριτές Κατανομές	Συνάρτηση Πιθανότητας	Ροπογεννήτρια	$E(X)$	$V(X)$
Διωνυμική με παραμέτρους $0 \leq p \leq 1$	$\binom{\nu}{\kappa} p^\kappa (1-p)^{\nu-\kappa}$ $\kappa = 0, \ldots, \nu$	$(pe^t + (1-p))^\nu$	νp	$\nu p(1-p)$
Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!}$ $\kappa = 0, 1 \ldots$	$e^{\lambda(e^t-1)}$	λ	λ
Γεωμετρική με παράμετρο $0 \leq p \leq 1$	$p(1-p)^{\kappa-1}$ $\kappa = 1, 2, \ldots$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Pascal με παραμέτρους κ, p	$\binom{\nu-1}{\kappa-1} p^\kappa (1-p)^{\nu-\kappa}$ $\nu = \kappa, \kappa+1, \ldots,$	$(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t})^\kappa$	$\frac{\kappa}{p}$	$\frac{\kappa(1-p)}{p^2}$

Πίνακας II: Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

Συνεχείς Κατανομές	Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας	Ροπογεννήτρια	$E(X)$	$V(X)$
Ομοιόμορφη στο (α, β)	$\frac{1}{\beta-\alpha}$, $\alpha < x < \beta$	$\frac{e^{t\beta}-e^{t\alpha}}{t(\beta-\alpha)}$	$\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$
Εκθετική με $\lambda > 0$	$\lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Γάμμα με (α, λ), $\alpha > 0$ $\lambda > 0$	$\frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ $x \geq 0$	$(\frac{\lambda}{\lambda-t})^\alpha$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$
Κανονική με (μ, σ^2)	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$ $-\infty < x < \infty$	$e^{\mu t+(\sigma t)^2/2}$	μ	σ^2
Βήτα με (α, β) $\alpha > 0, \beta > 0$	$Cx^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ $0 < x < 1$ $C = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$		$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

Πίνακας III. Συνάρτηση Πιθανότητας Διωνυμικής Κατανομής

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n$$

n	k	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
1	0	0.9500	0.9000	0.8500	0.8000	0.7500	0.7000	0.6500	0.6000	0.5500	0.5000
	1	0.0500	0.1000	0.1500	0.2000	0.2500	0.3000	0.3500	0.4000	0.4500	0.5000
2	0	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.0950	0.1800	0.2550	0.3200	0.3750	0.4200	0.4550	0.4800	0.4950	0.5000
	2	0.0025	0.0100	0.0225	0.0400	0.0625	0.0900	0.1225	0.1600	0.2025	0.2500
3	0	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.1354	0.2430	0.3251	0.3840	0.4219	0.4410	0.4436	0.4320	0.4084	0.3750
	2	0.0071	0.0270	0.0574	0.0960	0.1406	0.1890	0.2389	0.2880	0.3341	0.3750
	3	0.0001	0.0010	0.0034	0.0080	0.0156	0.0270	0.0429	0.0640	0.0911	0.1250
4	0	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.1715	0.2916	0.3685	0.4096	0.4219	0.4116	0.3845	0.3456	0.2995	0.2500
	2	0.0135	0.0486	0.0975	0.1536	0.2109	0.2646	0.3105	0.3456	0.3675	0.3750
	3	0.0005	0.0036	0.0115	0.0256	0.0469	0.0756	0.1115	0.1536	0.2005	0.2500
	4	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0039	0.0081	0.0150	0.0256	0.0410	0.0625
5	0	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.2036	0.3281	0.3915	0.4096	0.3955	0.3602	0.3124	0.2592	0.2059	0.1563
	2	0.0214	0.0729	0.1382	0.2048	0.2637	0.3087	0.3364	0.3456	0.3369	0.3125
	3	0.0011	0.0081	0.0244	0.0512	0.0879	0.1323	0.1811	0.2304	0.2757	0.3125
	4	0.0000	0.0005	0.0022	0.0064	0.0146	0.0284	0.0488	0.0768	0.1128	0.1563
	5	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0024	0.0053	0.0102	0.0185	0.0313
6	0	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156
	1	0.2321	0.3543	0.3993	0.3932	0.3560	0.3025	0.2437	0.1866	0.1359	0.0938
	2	0.0305	0.0984	0.1762	0.2458	0.2966	0.3241	0.3280	0.3110	0.2780	0.2344
	3	0.0021	0.0146	0.0415	0.0819	0.1318	0.1852	0.2355	0.2765	0.3032	0.3125
	4	0.0001	0.0012	0.0055	0.0154	0.0330	0.0595	0.0951	0.1382	0.1861	0.2344
	5	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015	0.0044	0.0102	0.0205	0.0369	0.0609	0.0938
	6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0018	0.0041	0.0083	0.0156
7	0	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078
	1	0.2573	0.3720	0.3960	0.3670	0.3115	0.2471	0.1848	0.1306	0.0872	0.0547
	2	0.0406	0.1240	0.2097	0.2753	0.3115	0.3177	0.2985	0.2613	0.2140	0.1641
	3	0.0036	0.0230	0.0617	0.1147	0.1730	0.2269	0.2679	0.2903	0.2918	0.2734
	4	0.0002	0.0026	0.0109	0.0287	0.0577	0.0972	0.1442	0.1935	0.2388	0.2734
	5	0.0000	0.0002	0.0012	0.0043	0.0115	0.0250	0.0466	0.0774	0.1172	0.1641
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0036	0.0084	0.0172	0.0320	0.0547
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0006	0.0016	0.0037	0.0078
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.2793	0.3826	0.3847	0.3355	0.2670	0.1977	0.1373	0.0896	0.0548	0.0313
	2	0.0515	0.1488	0.2376	0.2936	0.3115	0.2965	0.2587	0.2090	0.1569	0.1094
	3	0.0054	0.0331	0.0839	0.1468	0.2076	0.2541	0.2786	0.2787	0.2568	0.2188
	4	0.0004	0.0046	0.0185	0.0459	0.0865	0.1361	0.1875	0.2322	0.2627	0.2734
	5	0.0000	0.0004	0.0026	0.0092	0.0231	0.0467	0.0808	0.1239	0.1719	0.2188
	6	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0038	0.0100	0.0217	0.0413	0.0703	0.1094
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0012	0.0033	0.0079	0.0164	0.0313
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0017	0.0039

Πίνακας III. (Συνέχεια)

n	k	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	1	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1004	0.0605	0.0339	0.0176
	2	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2162	0.1612	0.1110	0.0703
	3	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2716	0.2508	0.2119	0.1641
	4	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2194	0.2508	0.2600	0.2461
	5	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.1181	0.1672	0.2128	0.2461
	6	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0424	0.0743	0.1160	0.1641
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0098	0.0212	0.0407	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0035	0.0083	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0020
10	0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	0.3151	0.3874	0.3474	0.2684	0.1877	0.1211	0.0725	0.0403	0.0207	0.0098
	2	0.0746	0.1937	0.2759	0.3020	0.2816	0.2335	0.1757	0.1209	0.0763	0.0439
	3	0.0105	0.0574	0.1298	0.2013	0.2503	0.2668	0.2522	0.2150	0.1665	0.1172
	4	0.0010	0.0112	0.0401	0.0881	0.1460	0.2001	0.2377	0.2508	0.2384	0.2051
	5	0.0001	0.0015	0.0085	0.0264	0.0584	0.1029	0.1536	0.2007	0.2340	0.2461
	6	0.0000	0.0001	0.0012	0.0055	0.0162	0.0368	0.0689	0.1115	0.1596	0.2051
	7	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0031	0.0090	0.0212	0.0425	0.0746	0.1172
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0043	0.0106	0.0229	0.0439
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0042	0.0098
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010
11	0	0.5688	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014	0.0005
	1	0.3293	0.3835	0.3248	0.2362	0.1549	0.0932	0.0518	0.0266	0.0125	0.0054
	2	0.0867	0.2131	0.2866	0.2953	0.2581	0.1998	0.1395	0.0887	0.0513	0.0269
	3	0.0137	0.0710	0.1517	0.2215	0.2581	0.2568	0.2254	0.1774	0.1259	0.0806
	4	0.0014	0.0158	0.0536	0.1107	0.1721	0.2201	0.2428	0.2365	0.2060	0.1611
	5	0.0001	0.0025	0.0132	0.0388	0.0803	0.1321	0.1830	0.2207	0.2360	0.2256
	6	0.0000	0.0003	0.0023	0.0097	0.0268	0.0566	0.0985	0.1471	0.1931	0.2256
	7	0.0000	0.0000	0.0003	0.0017	0.0064	0.0173	0.0379	0.0701	0.1128	0.1611
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0037	0.0102	0.0234	0.0462	0.0806
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018	0.0052	0.0126	0.0269
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0007	0.0021	0.0054
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0005
12	0	0.5404	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008	0.0002
	1	0.3413	0.3766	0.3012	0.2062	0.1267	0.0712	0.0368	0.0174	0.0075	0.0029
	2	0.0988	0.2301	0.2924	0.2835	0.2323	0.1678	0.1088	0.0639	0.0339	0.0161
	3	0.0173	0.0852	0.1720	0.2362	0.2581	0.2397	0.1954	0.1419	0.0923	0.0537
	4	0.0021	0.0213	0.0683	0.1329	0.1936	0.2311	0.2367	0.2128	0.1700	0.1208
	5	0.0002	0.0038	0.0193	0.0532	0.1032	0.1585	0.2039	0.2270	0.2225	0.1934
	6	0.0000	0.0005	0.0040	0.0155	0.0401	0.0792	0.1281	0.1766	0.2124	0.2256
	7	0.0000	0.0000	0.0006	0.0033	0.0115	0.0291	0.0591	0.1009	0.1489	0.1934
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0024	0.0078	0.0199	0.0420	0.0762	0.1208
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015	0.0048	0.0125	0.0277	0.0537
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008	0.0025	0.0068	0.0161
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0029
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002

Πίνακας ΙΙΙ. (Συνέχεια)

n	k	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
13	0	0.5133	0.2542	0.1209	0.0550	0.0238	0.0097	0.0037	0.0013	0.0004	0.0001
	1	0.3512	0.3672	0.2774	0.1787	0.1029	0.0540	0.0259	0.0113	0.0045	0.0016
	2	0.1109	0.2448	0.2937	0.2680	0.2059	0.1388	0.0836	0.0453	0.0220	0.0095
	3	0.0214	0.0997	0.1900	0.2457	0.2517	0.2181	0.1651	0.1107	0.0660	0.0349
	4	0.0028	0.0277	0.0838	0.1535	0.2097	0.2337	0.2222	0.1845	0.1350	0.0873
	5	0.0003	0.0055	0.0266	0.0691	0.1258	0.1803	0.2154	0.2214	0.1989	0.1571
	6	0.0000	0.0008	0.0063	0.0230	0.0559	0.1030	0.1546	0.1968	0.2169	0.2095
	7	0.0000	0.0001	0.0011	0.0058	0.0186	0.0442	0.0833	0.1312	0.1775	0.2095
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0011	0.0047	0.0142	0.0336	0.0656	0.1089	0.1571
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0009	0.0034	0.0101	0.0243	0.0495	0.0873
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0022	0.0065	0.0162	0.0349
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0012	0.0036	0.0095
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
14	0	0.4877	0.2288	0.1028	0.0440	0.0178	0.0068	0.0024	0.0008	0.0002	0.0001
	1	0.3593	0.3559	0.2539	0.1539	0.0832	0.0407	0.0181	0.0073	0.0027	0.0009
	2	0.1229	0.2570	0.2912	0.2501	0.1802	0.1134	0.0634	0.0317	0.0141	0.0056
	3	0.0259	0.1142	0.2056	0.2501	0.2402	0.1943	0.1366	0.0845	0.0462	0.0222
	4	0.0037	0.0349	0.0998	0.1720	0.2202	0.2290	0.2022	0.1549	0.1040	0.0611
	5	0.0004	0.0078	0.0352	0.0860	0.1468	0.1963	0.2178	0.2066	0.1701	0.1222
	6	0.0000	0.0013	0.0093	0.0322	0.0734	0.1262	0.1759	0.2066	0.2088	0.1833
	7	0.0000	0.0002	0.0019	0.0092	0.0280	0.0618	0.1082	0.1574	0.1952	0.2095
	8	0.0000	0.0000	0.0003	0.0020	0.0082	0.0232	0.0510	0.0918	0.1398	0.1833
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0018	0.0066	0.0183	0.0408	0.0762	0.1222
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0014	0.0049	0.0136	0.0312	0.0611
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0033	0.0093	0.0222
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0019	0.0056
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0009
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
15	0	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
	1	0.3658	0.3432	0.2312	0.1319	0.0668	0.0305	0.0126	0.0047	0.0016	0.0005
	2	0.1348	0.2669	0.2856	0.2309	0.1559	0.0916	0.0476	0.0219	0.0090	0.0032
	3	0.0307	0.1285	0.2184	0.2501	0.2252	0.1700	0.1110	0.0634	0.0318	0.0139
	4	0.0049	0.0428	0.1156	0.1876	0.2252	0.2186	0.1792	0.1268	0.0780	0.0417
	5	0.0006	0.0105	0.0449	0.1032	0.1651	0.2061	0.2123	0.1859	0.1404	0.0916
	6	0.0000	0.0019	0.0132	0.0430	0.0917	0.1472	0.1906	0.2066	0.1914	0.1527
	7	0.0000	0.0003	0.0030	0.0138	0.0393	0.0811	0.1319	0.1771	0.2013	0.1964
	8	0.0000	0.0000	0.0005	0.0035	0.0131	0.0348	0.0710	0.1181	0.1647	0.1964
	9	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0034	0.0116	0.0298	0.0612	0.1048	0.1527
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0030	0.0096	0.0245	0.0515	0.0916
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0024	0.0074	0.0191	0.0417
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0016	0.0052	0.0139
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0032
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Πίνακας ΙΙΙ. (Συνέχεια)

n	k	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
16	0	0.4401	0.1853	0.0743	0.0281	0.0100	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000
	1	0.3706	0.3294	0.2097	0.1126	0.0535	0.0228	0.0087	0.0030	0.0009	0.0002
	2	0.1463	0.2745	0.2775	0.2111	0.1336	0.0732	0.0353	0.0150	0.0056	0.0018
	3	0.0359	0.1423	0.2285	0.2463	0.2079	0.1465	0.0888	0.0468	0.0215	0.0085
	4	0.0061	0.0514	0.1311	0.2001	0.2252	0.2040	0.1553	0.1014	0.0572	0.0278
	5	0.0008	0.0137	0.0555	0.1201	0.1802	0.2099	0.2008	0.1623	0.1123	0.0667
	6	0.0001	0.0028	0.0180	0.0550	0.1101	0.1649	0.1982	0.1983	0.1684	0.1222
	7	0.0000	0.0004	0.0045	0.0197	0.0524	0.1010	0.1524	0.1889	0.1969	0.1746
	8	0.0000	0.0001	0.0009	0.0055	0.0197	0.0487	0.0923	0.1417	0.1812	0.1964
	9	0.0000	0.0000	0.0001	0.0012	0.0058	0.0185	0.0442	0.0840	0.1318	0.1746
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0014	0.0056	0.0167	0.0392	0.0755	0.1222
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0013	0.0049	0.0142	0.0337	0.0667
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0040	0.0115	0.0278
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008	0.0029	0.0085
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
17	0	0.4181	0.1668	0.0631	0.0225	0.0075	0.0023	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000
	1	0.3741	0.3150	0.1893	0.0957	0.0426	0.0169	0.0060	0.0019	0.0005	0.0001
	2	0.1575	0.2800	0.2673	0.1914	0.1136	0.0581	0.0260	0.0102	0.0035	0.0010
	3	0.0415	0.1556	0.2359	0.2393	0.1893	0.1245	0.0701	0.0341	0.0144	0.0052
	4	0.0076	0.0605	0.1457	0.2093	0.2209	0.1868	0.1320	0.0796	0.0411	0.0182
	5	0.0010	0.0175	0.0668	0.1361	0.1914	0.2081	0.1849	0.1379	0.0875	0.0472
	6	0.0001	0.0039	0.0236	0.0680	0.1276	0.1784	0.1991	0.1839	0.1432	0.0944
	7	0.0000	0.0007	0.0065	0.0267	0.0668	0.1201	0.1685	0.1927	0.1841	0.1484
	8	0.0000	0.0001	0.0014	0.0084	0.0279	0.0644	0.1134	0.1606	0.1883	0.1855
	9	0.0000	0.0000	0.0003	0.0021	0.0093	0.0276	0.0611	0.1070	0.1540	0.1855
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0025	0.0095	0.0263	0.0571	0.1008	0.1484
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0026	0.0090	0.0242	0.0525	0.0944
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0024	0.0081	0.0215	0.0472
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0021	0.0068	0.0182
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0016	0.0052
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Πίνακας III. (Συνέχεια)

n	k	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
18	0	0.3972	0.1501	0.0536	0.0180	0.0056	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.3763	0.3002	0.1704	0.0811	0.0338	0.0126	0.0042	0.0012	0.0003	0.0001
	2	0.1683	0.2835	0.2556	0.1723	0.0958	0.0458	0.0190	0.0069	0.0022	0.0006
	3	0.0473	0.1680	0.2406	0.2297	0.1704	0.1046	0.0547	0.0246	0.0095	0.0031
	4	0.0093	0.0700	0.1592	0.2153	0.2130	0.1681	0.1104	0.0614	0.0291	0.0117
	5	0.0014	0.0218	0.0787	0.1507	0.1988	0.2017	0.1664	0.1146	0.0666	0.0327
	6	0.0002	0.0052	0.0301	0.0816	0.1436	0.1873	0.1941	0.1655	0.1181	0.0708
	7	0.0000	0.0010	0.0091	0.0350	0.0820	0.1376	0.1792	0.1892	0.1657	0.1214
	8	0.0000	0.0002	0.0022	0.0120	0.0376	0.0811	0.1327	0.1734	0.1864	0.1669
	9	0.0000	0.0000	0.0004	0.0033	0.0139	0.0386	0.0794	0.1284	0.1694	0.1855
	10	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0042	0.0149	0.0385	0.0771	0.1248	0.1669
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0010	0.0046	0.0151	0.0374	0.0742	0.1214
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0047	0.0145	0.0354	0.0708
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0045	0.0134	0.0327
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0039	0.0117
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0031
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
	18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
19	0	0.3774	0.1351	0.0456	0.0144	0.0042	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.3774	0.2852	0.1529	0.0685	0.0268	0.0093	0.0029	0.0008	0.0002	0.0000
	2	0.1787	0.2852	0.2428	0.1540	0.0803	0.0358	0.0138	0.0046	0.0013	0.0003
	3	0.0533	0.1796	0.2428	0.2182	0.1517	0.0869	0.0422	0.0175	0.0062	0.0018
	4	0.0112	0.0798	0.1714	0.2182	0.2023	0.1491	0.0909	0.0467	0.0203	0.0074
	5	0.0018	0.0266	0.0907	0.1636	0.2023	0.1916	0.1468	0.0933	0.0497	0.0222
	6	0.0002	0.0069	0.0374	0.0955	0.1574	0.1916	0.1844	0.1451	0.0949	0.0518
	7	0.0000	0.0014	0.0122	0.0443	0.0974	0.1525	0.1844	0.1797	0.1443	0.0961
	8	0.0000	0.0002	0.0032	0.0166	0.0487	0.0981	0.1489	0.1797	0.1771	0.1442
	9	0.0000	0.0000	0.0007	0.0051	0.0198	0.0514	0.0980	0.1464	0.1771	0.1762
	10	0.0000	0.0000	0.0001	0.0013	0.0066	0.0220	0.0528	0.0976	0.1449	0.1762
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0018	0.0077	0.0233	0.0532	0.0970	0.1442
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0022	0.0083	0.0237	0.0529	0.0961
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0024	0.0085	0.0233	0.0518
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0024	0.0082	0.0222
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0022	0.0074
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003
	18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Πίνακας III. (Συνέχεια)

n	k	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
20	0	0.3585	0.1216	0.0388	0.0115	0.0032	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.3774	0.2702	0.1368	0.0576	0.0211	0.0068	0.0020	0.0005	0.0001	0.0000
	2	0.1887	0.2852	0.2293	0.1369	0.0669	0.0278	0.0100	0.0031	0.0008	0.0002
	3	0.0596	0.1901	0.2428	0.2054	0.1339	0.0716	0.0323	0.0123	0.0040	0.0011
	4	0.0133	0.0898	0.1821	0.2182	0.1897	0.1304	0.0738	0.0350	0.0139	0.0046
	5	0.0022	0.0319	0.1028	0.1746	0.2023	0.1789	0.1272	0.0746	0.0365	0.0148
	6	0.0003	0.0089	0.0454	0.1091	0.1686	0.1916	0.1712	0.1244	0.0746	0.0370
	7	0.0000	0.0020	0.0160	0.0545	0.1124	0.1643	0.1844	0.1659	0.1221	0.0739
	8	0.0000	0.0004	0.0046	0.0222	0.0609	0.1144	0.1614	0.1797	0.1623	0.1201
	9	0.0000	0.0001	0.0011	0.0074	0.0271	0.0654	0.1158	0.1597	0.1771	0.1602
	10	0.0000	0.0000	0.0002	0.0020	0.0099	0.0308	0.0686	0.1171	0.1593	0.1762
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0030	0.0120	0.0336	0.0710	0.1185	0.1602
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0039	0.0136	0.0355	0.0727	0.1201
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0045	0.0146	0.0366	0.0739
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0049	0.0150	0.0370
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0013	0.0049	0.0148
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0013	0.0046
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011
	18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
	19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Πίνακας IV. Συνάρτηση Πιθανότητας Κατανομής Poisson

$$p(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

(για τιμές του k που δεν περιλαμβάνονται στον πίνακα η τιμή της αντίστοιχης πιθανότητας είναι μικρότερη από 10^{-4}).

	λ									
k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.0905	0.1637	0.2222	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988	0.1217	0.1438	0.1647	0.1839
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613
4	0.0000	0.0001	0.0003	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

	λ									
k	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
0	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353
1	0.3662	0.3614	0.3543	0.3452	0.3347	0.3230	0.3106	0.2975	0.2842	0.2707
2	0.2014	0.2169	0.2303	0.2417	0.2510	0.2584	0.2640	0.2678	0.2700	0.2707
3	0.0738	0.0867	0.0998	0.1128	0.1255	0.1378	0.1496	0.1607	0.1710	0.1804
4	0.0203	0.0260	0.0324	0.0395	0.0471	0.0551	0.0636	0.0723	0.0812	0.0902
5	0.0045	0.0062	0.0084	0.0111	0.0141	0.0176	0.0216	0.0260	0.0309	0.0361
6	0.0008	0.0012	0.0018	0.0026	0.0035	0.0047	0.0061	0.0078	0.0098	0.0120
7	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0008	0.0011	0.0015	0.0020	0.0027	0.0034
8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0006	0.0009
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002

	λ									
k	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
0	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.2572	0.2438	0.2306	0.2177	0.2052	0.1931	0.1815	0.1703	0.1596	0.1494
2	0.2700	0.2681	0.2652	0.2613	0.2565	0.2510	0.2450	0.2384	0.2314	0.2240
3	0.1890	0.1966	0.2033	0.2090	0.2138	0.2176	0.2205	0.2225	0.2237	0.2240
4	0.0992	0.1082	0.1169	0.1254	0.1336	0.1414	0.1488	0.1557	0.1622	0.1680
5	0.0417	0.0476	0.0538	0.0602	0.0668	0.0735	0.0804	0.0872	0.0940	0.1008
6	0.0146	0.0174	0.0206	0.0241	0.0278	0.0319	0.0362	0.0407	0.0455	0.0504
7	0.0044	0.0055	0.0068	0.0083	0.0099	0.0118	0.0139	0.0163	0.0188	0.0216
8	0.0011	0.0015	0.0019	0.0025	0.0031	0.0038	0.0047	0.0057	0.0068	0.0081
9	0.0003	0.0004	0.0005	0.0007	0.0009	0.0011	0.0014	0.0018	0.0022	0.0027
10	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0008
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

Πίνακας IV. (Συνέχεια)

	λ									
k	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4
0	0.0450	0.0408	0.0369	0.0334	0.0302	0.0273	0.0247	0.0224	0.0202	0.0183
1	0.1397	0.1304	0.1217	0.1135	0.1057	0.0984	0.0915	0.0850	0.0789	0.0733
2	0.2165	0.2087	0.2008	0.1929	0.1850	0.1771	0.1692	0.1615	0.1539	0.1465
3	0.2237	0.2226	0.2209	0.2186	0.2158	0.2125	0.2087	0.2046	0.2001	0.1954
4	0.1733	0.1781	0.1823	0.1858	0.1888	0.1912	0.1931	0.1944	0.1951	0.1954
5	0.1075	0.1140	0.1203	0.1264	0.1322	0.1377	0.1429	0.1477	0.1522	0.1563
6	0.0555	0.0608	0.0662	0.0716	0.0771	0.0826	0.0881	0.0936	0.0989	0.1042
7	0.0246	0.0278	0.0312	0.0348	0.0385	0.0425	0.0466	0.0508	0.0551	0.0595
8	0.0095	0.0111	0.0129	0.0148	0.0169	0.0191	0.0215	0.0241	0.0269	0.0298
9	0.0033	0.0040	0.0047	0.0056	0.0066	0.0076	0.0089	0.0102	0.0116	0.0132
10	0.0010	0.0013	0.0016	0.0019	0.0023	0.0028	0.0033	0.0039	0.0045	0.0053
11	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0009	0.0011	0.0013	0.0016	0.0019
12	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006
13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

	λ									
k	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5
0	0.0166	0.0150	0.0136	0.0123	0.0111	0.0101	0.0091	0.0082	0.0074	0.0067
1	0.0679	0.0630	0.0583	0.0540	0.0500	0.0462	0.0427	0.0395	0.0365	0.0337
2	0.1393	0.1323	0.1254	0.1188	0.1125	0.1063	0.1005	0.0948	0.0894	0.0842
3	0.1904	0.1852	0.1798	0.1743	0.1687	0.1631	0.1574	0.1517	0.1460	0.1404
4	0.1951	0.1944	0.1933	0.1917	0.1898	0.1875	0.1849	0.1820	0.1789	0.1755
5	0.1600	0.1633	0.1662	0.1687	0.1708	0.1725	0.1738	0.1747	0.1753	0.1755
6	0.1093	0.1143	0.1191	0.1237	0.1281	0.1323	0.1362	0.1398	0.1432	0.1462
7	0.0640	0.0686	0.0732	0.0778	0.0824	0.0869	0.0914	0.0959	0.1002	0.1044
8	0.0328	0.0360	0.0393	0.0428	0.0463	0.0500	0.0537	0.0575	0.0614	0.0653
9	0.0150	0.0168	0.0188	0.0209	0.0232	0.0255	0.0281	0.0307	0.0334	0.0363
10	0.0061	0.0071	0.0081	0.0092	0.0104	0.0118	0.0132	0.0147	0.0164	0.0181
11	0.0023	0.0027	0.0032	0.0037	0.0043	0.0049	0.0056	0.0064	0.0073	0.0082
12	0.0008	0.0009	0.0011	0.0013	0.0016	0.0019	0.0022	0.0026	0.0030	0.0034
13	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008	0.0009	0.0011	0.0013
14	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0005
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002

Πίνακας IV. (Συνέχεια)

	λ									
k	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0.0025	0.0009	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0149	0.0064	0.0027	0.0011	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0446	0.0223	0.0107	0.0050	0.0023	0.0010	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000
3	0.0892	0.0521	0.0286	0.0150	0.0076	0.0037	0.0018	0.0008	0.0004	0.0002
4	0.1339	0.0912	0.0573	0.0337	0.0189	0.0102	0.0053	0.0027	0.0013	0.0006
5	0.1606	0.1277	0.0916	0.0607	0.0378	0.0224	0.0127	0.0070	0.0037	0.0019
6	0.1606	0.1490	0.1221	0.0911	0.0631	0.0411	0.0255	0.0152	0.0087	0.0048
7	0.1377	0.1490	0.1396	0.1171	0.0901	0.0646	0.0437	0.0281	0.0174	0.0104
8	0.1033	0.1304	0.1396	0.1318	0.1126	0.0888	0.0655	0.0457	0.0304	0.0194
9	0.0688	0.1014	0.1241	0.1318	0.1251	0.1085	0.0874	0.0661	0.0473	0.0324
10	0.0413	0.0710	0.0993	0.1186	0.1251	0.1194	0.1048	0.0859	0.0663	0.0486
11	0.0225	0.0452	0.0722	0.0970	0.1137	0.1194	0.1144	0.1015	0.0844	0.0663
12	0.0113	0.0263	0.0481	0.0728	0.0948	0.1094	0.1144	0.1099	0.0984	0.0829
13	0.0052	0.0142	0.0296	0.0504	0.0729	0.0926	0.1056	0.1099	0.1060	0.0956
14	0.0022	0.0071	0.0169	0.0324	0.0521	0.0728	0.0905	0.1021	0.1060	0.1024
15	0.0009	0.0033	0.0090	0.0194	0.0347	0.0534	0.0724	0.0885	0.0989	0.1024
16	0.0003	0.0014	0.0045	0.0109	0.0217	0.0367	0.0543	0.0719	0.0866	0.0960
17	0.0001	0.0006	0.0021	0.0058	0.0128	0.0237	0.0383	0.0550	0.0713	0.0847
18	0.0000	0.0002	0.0009	0.0029	0.0071	0.0145	0.0255	0.0397	0.0554	0.0706
19	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0037	0.0084	0.0161	0.0272	0.0409	0.0557
20	0.0000	0.0000	0.0002	0.0006	0.0019	0.0046	0.0097	0.0177	0.0286	0.0418
21	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0009	0.0024	0.0055	0.0109	0.0191	0.0299
22	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0012	0.0030	0.0065	0.0121	0.0204
23	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0006	0.0016	0.0037	0.0074	0.0133
24	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0020	0.0043	0.0083
25	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0010	0.0024	0.0050
26	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0005	0.0013	0.0029
27	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0016
28	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0009
29	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004
30	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002
31	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
32	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

Πίνακας V. Αθροιστική Συνάρτηση Πιθανότητας Τυπικής Κανονικής Κατανομής

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2} du$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Πίνακας VI. Άνω Κρίσιμες Τιμές Κατανομής t-Student με n βαθμούς ελευθερίας

$$t_{n,\alpha}: \quad \mathbb{P}(t > t_{n,\alpha}) = \alpha$$

n	$t_{n,0.005}$	$t_{n,0.01}$	$t_{n,0.25}$	$t_{n,0.05}$	$t_{n,0.1}$
1	63.66	31.82	12.71	6.31	3.08
2	9.92	6.96	4.30	2.92	1.89
3	5.84	4.54	3.18	2.35	1.64
4	4.60	3.75	2.78	2.13	1.53
5	4.03	3.36	2.57	2.02	1.48
6	3.71	3.14	2.45	1.94	1.44
7	3.50	3.00	2.36	1.89	1.41
8	3.36	2.90	2.31	1.86	1.40
9	3.25	2.82	2.26	1.83	1.38
10	3.17	2.76	2.23	1.81	1.37
11	3.11	2.72	2.20	1.80	1.36
12	3.05	2.68	2.18	1.78	1.36
13	3.01	2.65	2.16	1.77	1.35
14	2.98	2.62	2.14	1.76	1.35
15	2.95	2.60	2.13	1.75	1.34
16	2.92	2.58	2.12	1.75	1.34
17	2.90	2.57	2.11	1.74	1.33
18	2.88	2.55	2.10	1.73	1.33
19	2.86	2.54	2.09	1.73	1.33
20	2.85	2.53	2.09	1.72	1.33
21	2.83	2.52	2.08	1.72	1.32
22	2.82	2.51	2.07	1.72	1.32
23	2.81	2.50	2.07	1.71	1.32
24	2.80	2.49	2.06	1.71	1.32
25	2.79	2.49	2.06	1.71	1.32
26	2.78	2.48	2.06	1.71	1.31
27	2.77	2.47	2.05	1.70	1.31
28	2.76	2.47	2.05	1.70	1.31
29	2.76	2.46	2.05	1.70	1.31
30	2.75	2.46	2.04	1.70	1.31
40	2.70	2.42	2.02	1.68	1.30
60	2.66	2.39	2.00	1.67	1.30
120	2.62	2.36	1.98	1.66	1.29
∞	2.58	2.33	1.96	1.65	1.28

Πίνακας VII. Άνω Κρίσιμες Τιμές Κατανομής χ^2 με n βαθμούς ελευθερίας

$$\chi^2_{n,\alpha}: \quad \mathbb{P}(\chi^2 > \chi^2_{n,\alpha}) = \alpha$$

n	$\chi^2_{n,0.005}$	$\chi^2_{n,0.01}$	$\chi^2_{n,0.25}$	$\chi^2_{n,0.05}$	$\chi^2_{n,0.1}$
1	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71
2	10.60	9.21	7.38	5.99	4.61
3	12.84	11.34	9.35	7.81	6.25
4	14.86	13.28	11.14	9.49	7.78
5	16.75	15.09	12.83	11.07	9.24
6	18.55	16.81	14.45	12.59	10.64
7	20.28	18.48	16.01	14.07	12.02
8	21.95	20.09	17.53	15.51	13.36
9	23.59	21.67	19.02	16.92	14.68
10	25.19	23.21	20.48	18.31	15.99
11	26.76	24.72	21.92	19.68	17.28
12	28.30	26.22	23.34	21.03	18.55
13	29.82	27.69	24.74	22.36	19.81
14	31.32	29.14	26.12	23.68	21.06
15	32.80	30.58	27.49	25.00	22.31
16	34.27	32.00	28.85	26.30	23.54
17	35.72	33.41	30.19	27.59	24.77
18	37.16	34.81	31.53	28.87	25.99
19	38.58	36.19	32.85	30.14	27.20
20	40.00	37.57	34.17	31.41	28.41
21	41.40	38.93	35.48	32.67	29.62
22	42.80	40.29	36.78	33.92	30.81
23	44.18	41.64	38.08	35.17	32.01
24	45.56	42.98	39.36	36.42	33.20
25	46.93	44.31	40.65	37.65	34.38
26	48.29	45.64	41.92	38.89	35.56
27	49.64	46.96	43.19	40.11	36.74
28	50.99	48.28	44.46	41.34	37.92
29	52.34	49.59	45.72	42.56	39.09
30	53.67	50.89	46.98	43.77	40.26
40	66.77	63.69	59.34	55.76	51.81
60	91.95	88.38	83.30	79.08	74.40
80	116.32	112.33	106.63	101.88	96.58
100	140.17	135.81	129.56	124.34	118.50

Πίνακας VIII. Άνω Κρίσιμες Τιμές Κατανομής F με n_1, n_2 βαθμούς ελευθερίας και $\alpha = 0.01$.

$$F_{n_1,n_2;0.01}: \quad \mathbb{P}(F > F_{n_1,n_2;0.01}) = 0.01$$

	$n_1 = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
$n_2 = 1$	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6363
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.14
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.47
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.03
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.89
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.66
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.87
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.32
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.92
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.61
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.37
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.18
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.02
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.88
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.76
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.66
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.58
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.50
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.43
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.37
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.32
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.27
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.22
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.18
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.14
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.11
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.08
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.05
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.02
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.82
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.62
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.40
∞	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43	2.34	2.20	2.06	1.90	1.81	1.72	1.61	1.50	1.35	1.16

Πίναχας IX. Άνω Κρίσιμες Τιμές Κατανομής F με n_1, n_2 βαθμούς ελευθερίας και $\alpha = 0.05$.

$$F_{n_1,n_2;0.05}: \quad \mathbb{P}(F > F_{n_1,n_2;0.05}) = 0.05$$

	$n_1 = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
$n_2 = 1$	161	199	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.49
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.41
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.14
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.97
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.85
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.74
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.72
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.70
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.68
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.66
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.65
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.63
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.52
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.40
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.27
∞	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89	1.84	1.76	1.68	1.58	1.53	1.47	1.41	1.33	1.24	1.11

Πίνακας X. Άνω Κρίσιμες Τιμές Κατανομής F με n_1, n_2 βαθμούς ελευθερίας και $\alpha = 0.10$.

$$F_{n_1,n_2;0.10}: \quad \mathbb{P}(F > F_{n_1,n_2;0.10}) = 0.10$$

	$n_1 = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
$n_2 = 1$	40	49	54	56	57	58	59	59	60	60	61	61	62	62	62	63	63	63	63
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.11
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.30
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.98
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.91
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.51
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.50
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.30
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.20
∞	2.71	2.31	2.09	1.95	1.85	1.78	1.72	1.68	1.64	1.61	1.55	1.49	1.43	1.39	1.35	1.30	1.25	1.18	1.08

Βιβλιογραφία

Casella, G., Berger, R. L. , *Statistical Inference*, 2nd edition, Academic Press, 2006.

Durret, R., *Essentials of Probability*, Duxbury Press, Belmont, CA, 1993.

Durret, R., *Probability: Theory and Examples*, Duxbury Press, Belmont, CA, 1995.

Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol.1, J. Wiley, N.Y., 1968.

Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol.2, 2nd ed., J. Wiley, N.Y., 1971.

Fisz, M. *Probability Theory and Mathematical Statistics*, 3rd ed., Wiley, New York, 1963.

Freedman, D., Pisani, R., Purves, R., *Statistics*, W. W. Norton Company, 1978.

Freund, J. E., *Mathematical Statistics*, 5th edition, Prentice Hall, 1992.

Hoel, G. P., Port, C. S., Stone, C. J., *Introduction to Probability Theory*, Houghton Mifflin Company, Boston, 1971-2000.

Hoel, G. P., Port, C. S., Stone, C. J., *Εισαγωγή στη θεωρία Πιθανοτήτων*, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2002.

Hoel, G. P., Port, C. S., Stone, C. J., *Introduction to Statistical Theory*, Houghton Mifflin Company, Boston, 1971.

Hogg, V. R, Tanis, A. E. , *Probability and Statistical Inference*, Macmillan Publishing Company, 3rd edition, 1988.

Neter, J., Wasserman, W., Kutner, M. H., *Applied Linear Statistical Models: Regression, Analysis of Variance, and Experimental Designs*, 3rd edition, Irwin, 1990.

Ross, S. M., *A first course in Probability*, 4th ed., Macmillan, New York, 1994.

Ross, S. M., *Introductory Statistics*, 2nd edition, Academic Press, 2005.

Δαμιανού, Χ., Κούτρας, Μ., *Εισαγωγή στη Στατιστική*, Τόμοι 1, 2, Συμμετρία, 1998.

Χαραλαμπίδης, Χ., *Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές*, Τεύχη 1, 2, Συμμετρία, 1990.