

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: ΤΣΑΠΟΓΑΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

# ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ


ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ



Πανεπιστήμιο Αιγαίου,  
Τμήμα Μαθηματικών  
Σάμος Εαρινό Εξάμηνο 2005



ΣΤΟΙΧΕΟΘΕΣΙΑ : ΞΕΝΙΤΙΔΗΣ ΚΛΕΑΝΘΗΣ  
L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>

ΣΧΕΔΙΑ : Dia   
mathematica 5.2

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 31 ΜΑΡΤΙΟΥ 2007



# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

---

<b>1</b>	<b>Καμπύλες</b>	<b>3</b>
1.1	Παραμετριοποιημένες Καμπύλες	3
1.2	Κανονικές Καμπύλες	5
1.2α'	Ασκήσεις - Παραδείγματα	7
1.3	Εξωτερικό Γινόμενο (Διανυσματικό Γινόμενο)	10
1.4	Τοπική Θεωρία Καμπυλών	13
1.4α'	Επίπεδο Κίνησης	14
1.4β'	Ανακεφαλαίωση	17
1.4γ'	Ασκήσεις - Παραδείγματα	18
1.5	Ισοπεριμετρική Ανισότητα	21
<b>2</b>	<b>Επιφάνειες στον <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>25</b>
2.1	Διαφορισιμότητα Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών	25
2.1α'	Κανόνας Αλυσίδας	25
2.2	Κανονικές Επιφάνειες	30
2.2α'	Σφαιρικές Συντεταγμένες	33
2.2β'	Ασκήσεις - Παραδείγματα	39
<b>A'</b>	<b>Σχήματα Σχεδιασμένα στο Mathematica 5.2</b>	<b>43</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>55</b>
	<b>Ευρετήριο</b>	<b>57</b>



# ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

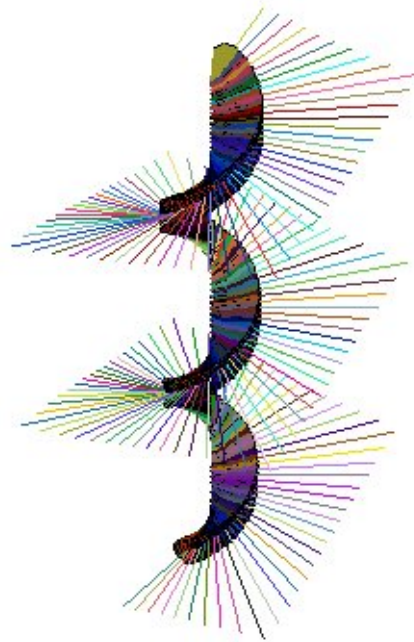
---

1.1	έλικας	3
1.2	η καμπύλη $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, 2t)$	4
1.3	η καμπύλη $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$	4
1.4	οι καμπύλες $(\cos(t), \sin(t))$ και $(\cos(2t), \sin(2t))$	4
1.5	η καμπύλη $\alpha(t) = (t, t^3)$	6
1.6	κυκλοειδές	7
1.7	μεγένθυση κυκλοειδούς	7
1.8	οι καμπύλες $\cosh$ , $\sinh$ και ο υπερβολικός έλικας	8
1.9	λογαριθμικός έλικας	9
1.10	η μικρότερη καμπύλη που ενώνει δύο σημεία	10
1.11	το διάνυσμα $u \times v$	12
1.12	παράλληλες ευθείες στον $\mathbb{R}^3$	13
1.13	ρυθμός μεταβολής εφαπτόμενης ευθείας	13
1.14	κύριο κάθετο διάνυσμα	15
1.15	επίπεδο κίνησης μίας καμπύλης	15
1.16	οι καμπύλες $(t, 0, e^{-\frac{1}{t^2}})$ και $(t, e^{-\frac{1}{t^2}}, 0)$	16
1.17	παράδειγμα στο θεμελιώδες $\theta$ . τοπικής θεωρίας καμπυλών	17
1.18	Τα διανύσματα $T, N, B$ στον έλικα, σχήμα μεγενθυμένο	19
1.19	η καμπύλη $(\frac{(1+s)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{(1-s)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}})$	19
1.20	θεώρημα Green	21
1.21	σκηνάκι μήκους $L$ και ορθογώνιο τρίγωνο υποτίνουσας $L$	22
2.1	η μπάλα $B(\rho, \delta)$	28
2.2	$(e^x \cos(y), e^x \sin(y))$	29
2.3	τομή σφαίρας και ενός επιπέδου	30
2.4	το σημείο $q$ στην κανονική βάση	30

- 2.5 Η απεικόνιση  $f_1$  από τον κυκλικό δίσκο στο ανοιχτό άνω ημισφαίριο της  $S^2$  32
- 2.6 κάλυψη της σφαίρας  $S^2$  32
- 2.7 σφαιρικές συντεταγμένες 33
- 2.8 η σφαίρα  $S^2$  με τα επίπεδα  $y = 0$  και  $z = 0$  34
- 2.9 παράδειγμα κρίσιμων και κανονικών τιμών 35
- 2.10 Το γράφημα του  $f^{-1} \cap V$  και η προβολή του  $W$  36
- 2.11 το υπερβολοειδές  $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$  37
- 2.12 τόρος 37
- 2.13 zoom τόρου 38
- 2.14  $(x + 1)^2 + y^2 = 1 \cup (x - 1)^2 + y^2 = 1$  40







# ΚΑΜΠΥΛΕΣ

## 1.1 Παραμετρικοποιημένες Καμπύλες

**Ορισμός 1.1.1.** Μία συνάρτηση  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ( $I$ : υποδιάστημα) θα λέγεται **διαφορίσιμη** ή **λεία** αν έχει παραγώγους κάθε τάξεως.

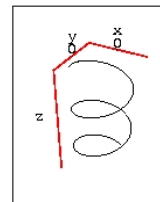
**Ορισμός 1.1.2.** Μια παραμετρικοποιημένη καμπύλη ή καμπύλη με παραμέτρηση είναι μία λεία συνάρτηση  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  ( $I \subseteq \mathbb{R}$ ) ( $I$  ανοιχτό υποδιάστημα του  $\mathbb{R}$ ).

Η λέξη λεία στον παραπάνω ορισμό σημαίνει ότι η  $\alpha$  απεικονίζει το σημείο  $t$  στο  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$  με τρόπο ώστε οι απεικονίσεις  $t \rightarrow x(t)$ ,  $t \rightarrow y(t)$  και  $t \rightarrow z(t)$  να είναι λείες.

Η μεταβλητή  $t \in I$  ονομάζεται παράμετρος. Το διάνυσμα  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$  ονομάζεται διάνυσμα της ταχύτητας (ή εφαπτόμενο διάνυσμα). Η εικόνα  $\alpha(I)$  είναι υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$  και ονομάζεται ίχνος της καμπύλης. Υπάρχουν διαφορετικές καμπύλες με το ίδιο ίχνος.

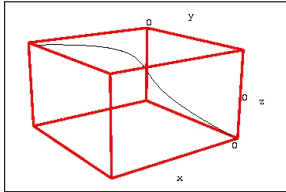
**παράδειγμα 1.1.** Έστω η καμπύλη  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$ ,  $a, b > 0$ .

Το ίχνος της καμπύλης  $\alpha$  είναι ένας έλικας πάνω στον κύλινδρο ακτίνας  $a$  και άξωνα  $zz'$ . Η παράμετρος  $t$  μετράει την γωνία που σχηματίζει η προβολή του  $\alpha(t)$  στο  $xy$  επίπεδο με τον άξωνα  $0x$ . Η  $\alpha$  είναι λεία (άπειρες φορές διαφορίσιμη).



Σχήμα 1.1: έλικας

**παράδειγμα 1.2.** Έστω η καμπύλη  $\alpha : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, 2t)$ .



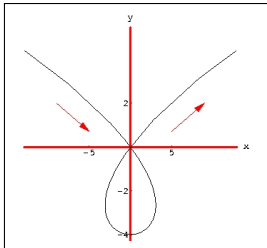
Το ίχνος της καμπύλης κείται υπεράνω του γραφήματος  $xy = 1$  με ρυθμό ανόδου (ως προς  $z$ )  $= 2$ . Η  $\alpha$  είναι λεία. Το διάνυσμα ταχύτητας είναι  $\alpha'(t) = (e^t, -e^{-t}, 2)$ .

Σχήμα 1.2:  
 $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, 2t)$

**παράδειγμα 1.3.** Η  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = (t^2, t^3)$  είναι καμπύλη με παραμέτρηση. Επιπλέον έχουμε,  $\alpha'(0) = (2t, 3t^2)_{t=0} = (0, 0)$ .

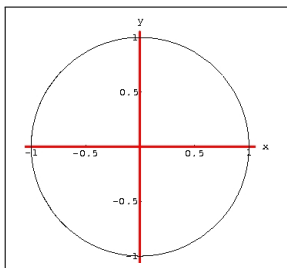
**παράδειγμα 1.4.** Η απεικόνιση  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$  είναι

καμπύλη με παραμέτρηση που δεν είναι 1-1. Για  $t = -2$  και  $t = 2$  έχουμε  $\alpha(2) = \alpha(-2) = (0, 0)$ .



Σχήμα 1.3:  
 $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$

**παράδειγμα 1.5.** Έστω οι καμπύλες  $\alpha, \beta : (0 - \frac{1}{14}, 2\pi + \frac{1}{14}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$ ,  $\beta(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$ .



Οι καμπύλες  $\alpha$  και  $\beta$  έχουν το ίδιο ίχνος. Το ίχνος τους είναι ο κύκλος με κέντρο το  $(0, 0)$  και ακτίνα 1. Ως υποσύνολα του  $\mathbb{R}^2$  είναι ίδια αλλά ως καμπύλες είναι διαφορετικές.

Σχήμα 1.4:  $\alpha(t), \beta(t)$

**υπενθύμιση**

- Εάν  $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$  τότε ορίζεται η νόρμα (μέτρο) του  $u$  ως εξής,  $|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$  = απόσταση του  $u$  από το  $(0, 0)$ . Η νόρμα επίσης καλείται και ευκλείδεια απόσταση.
- Εάν  $u = (u_1, u_2, u_3)$  και  $v = (v_1, v_2, v_3)$  και  $\vartheta \in [0, 2\pi]$  η περιεχόμενη γωνία των  $u$  και  $v$  τότε ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο ως  $u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos(\vartheta)$

**ιδιότητες**

- Εστω  $u, v \neq 0$ . Αν  $u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u \perp v$  ( $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  ή  $\frac{3\pi}{2}$ ).
- $u \cdot v = v \cdot u$ .
- $\lambda(v \cdot w) = (\lambda \cdot v) \cdot (w) = v \cdot (\lambda \cdot w)$ .
- $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$ .
- Εάν  $\{e_i\}_{i=1,2,3}$  είναι η ορθοκανονική βάση του  $\mathbb{R}^3$  και  $u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$  χρησιμοποιώντας τις δύο προηγούμενες ιδιότητες έχουμε ότι:

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Εάν  $u(t)$  και  $v(t)$  είναι παραμετριοποιημένες καμπύλες τότε  $(u \cdot v)(t) = u(t) \cdot v(t) = u_1(t)v_1(t) + u_2(t)v_2(t) + u_3(t)v_3(t)$ . Και  $\frac{d}{dt}(u(t) \cdot v(t)) = u'(t)v(t) + u(t) \cdot v'(t)$ .

**1.2 Κανονικές Καμπύλες**

Έστω  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  παραμετριοποιημένη καμπύλη με  $\alpha'(t) = 0$  για κάποιο  $t \in I$ . Τότε θα υπάρχει μία μοναδικά ορισμένη ευθεία που θα περνάει από το  $\alpha(t)$  και περιέχει το  $\alpha'(t)$ . Είναι σημαντικό στην διαφορική γεωμετρία η ύπαρξη αυτής της ευθείας.

**Ορισμός 1.2.1.** Ένα σημείο  $t$  για το οποίο ισχύει  $\alpha'(t) = 0$  ονομάζεται **σημείο ιδιομορφίας ή ιδιάζων σημείο**.

Στο παράδειγμα 1.3 η καμπύλη έχει ιδιάζων δημείο.

**Ορισμός 1.2.2.** Μία καμπύλη θα λέγεται **κανονική** αν  $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in I$ .

Έστω καμπύλη  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  και έστω  $t_0 \in I$ . Υποθέτουμε ότι  $\alpha$  κανονική καμπύλη. Το μήκος τόξου της παραμετρικοποιημένης καμπύλης  $\alpha$  από το  $t_0$  είναι:

$$S(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt.$$

όπου:

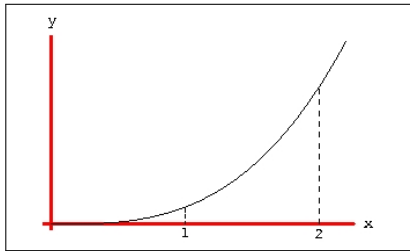
$$|\alpha'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}.$$

Δεδομένου ότι  $\alpha'(t) \neq 0, \forall t$  έχουμε ότι η  $S(t)$  είναι παραγωγίσιμη ως προς  $t$  και άρα  $\frac{d}{dt}S(t) = |\alpha'(t)|$ .

Εαν η καμπύλη  $\alpha$  έχει παράμετρο  $t$  η οποία είναι ήδη ίση με το μήκος τόξου μετρημένο από κάποιο σημείο  $t_0$  τότε  $S(t) = t \Rightarrow \frac{d}{dt}S(t) = 1 = |\alpha'(t)|$ . Δηλαδή η ταχύτητα έχει μέτρο 1. Αντίστροφα αν η ταχύτητα της  $\alpha$  έχει μέτρο 1 τότε  $S(t) = \int_{t_0}^t 1 dt = t - t_0$ . Τότε η παράμετρος είναι ίση με το μήκος τόξου.

Για λόγους απλούστευσης (των ιδεών και των επιχειρημάτων) θα υποθέσουμε από εδώ και στο εξής ότι όλες οι θεωρούμενες καμπύλες έχουν παραμέτρηση μήκους τόξου (ισοδύναμα |ταχύτητα| = 1). Ο περιορισμός αυτός όμως δεν είναι ουσιώδης όπως θα δούμε στη συνέχεια με παράδειγμα, ασυτηρά θα αποδειχθεί αργότερα. Επιπλέον ούτε το  $t_0$  έχει ουσιώδη ρόλο δεδομένου ότι οι περισσότερες έννοιες στη διαφορική γεωμετρία ορίζονται με χρήση παραγώγου.

**παράδειγμα 1.6.** Έστω η καμπύλη  $\alpha : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2 \alpha(t) = (t, t^3)$ . Θα υπολογίσουμε το μήκος της καμπύλης από το 0 έως το 2.



$$S = \int_0^2 |\alpha'(t)| dt = \int_0^2 \sqrt{1^2 + 9t^4} dt$$

Σχήμα 1.5:  $\alpha(t) = (t, t^3)$

**παράδειγμα 1.7.** Έστω ότι έχουμε μία καμπύλη  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  και έστω  $S = \int_a^b |\alpha'(t)| dt$  το μήκος της. Θεωρώ την συνάρτηση  $f : [0, s] \rightarrow [a, b], f(r) = \frac{r}{s}b + (1 - \frac{r}{s})a$ . Η  $f$  είναι 1-1 και επί. Η καμπύλη  $\beta : [0, s] \rightarrow \mathbb{R}^3, \beta(r) = \alpha(f(r))$  έχει το ίδιο ίχνος με την  $\alpha$  αλλά με διαφορετική παραμέτρηση. Ξεκινάει από το  $\alpha(a)$  και σταματάει στο  $\alpha(b)$ . Επιπλέον έχουμε ότι  $\beta'(r) \neq 0$ . Άρα η συνάρτηση από το  $r$  στο  $|\beta'(r)|$  δεν μηδενίζεται. Άρα υπάρχει  $g$  τέτοια ώστε  $g(r) \cdot |\beta'(r)| = 1$ . Άρα συνθέτωντας με  $g^{-1}$  έχω παραμέτρηση με ταχύτητα μέτρου 1 και άρα έχω παραμέτρηση μήκους τόξου.

### 1.2α' Ασκήσεις - Παραδείγματα

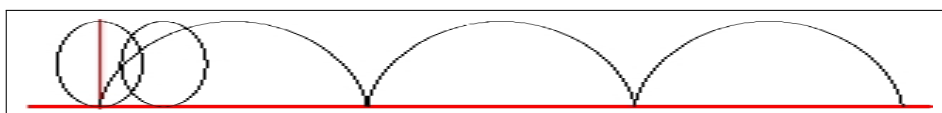
1) Έστω η καμπύλη  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$ . Θα βρούμε την παραμέτρηση μήκους τόξου μετρημένη από το 0. Υπολογίζουμε την παράγωγο  $\alpha'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), b)$ .

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2(t) + a^2 \cos^2(t) + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \text{σταθερά} = u$$

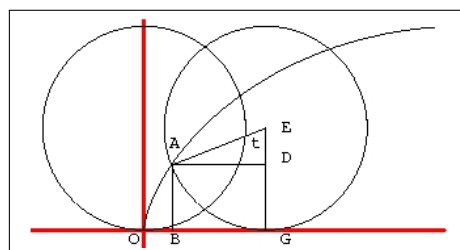
Άρα το  $S(t) = \int_0^t u dt = ut$ . Συνεπώς θέτουμε  $t(s) = \frac{s}{u}$  και αντικαθιστώντας στην  $\alpha(t)$  έχουμε  $\alpha(s) = (a \cos(\frac{s}{u}), a \sin(\frac{s}{u}), b \frac{s}{u})$  όπου  $u = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Άρα,

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= \left(-\frac{1}{u}a \sin\left(\frac{s}{u}\right), \frac{1}{u}a \cos\left(\frac{s}{u}\right), \frac{b}{u}\right) \\ |\alpha'(s)| &= \sqrt{\frac{a^2}{u^2} \sin^2\left(\frac{s}{u}\right) + \frac{a^2}{u^2} \cos^2\left(\frac{s}{u}\right) + \frac{b^2}{u^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{u^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2) Έστω δίσκος ακτίνας 1 ο οποίος περιστρέφεται (χωρίς να ολισθαίνει) στο επίπεδο. Η τροχιά ενός σημείου της περιφέρειας του δίσκου λέγεται κυκλοειδής (cycloid).



Σχήμα 1.6: κυκλοειδής



Σχήμα 1.7: μεγένθυση κυκλοειδούς

Έστω η καμπύλη  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) =$  (συντεταγμένες του σημείου A) =  $(OB, AB)$ . Θα υπολογίσουμε τα  $OB$  και  $AB$  σύμφωνα με την γωνία  $t$ .

$$OB = t - BG = t - AD = t - \sin(t)$$

$$AB = 1 - \cos(t)$$

Και άρα  $\alpha(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$

με  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Σημεία ιδιομορφίας της  $\alpha$  (τα σημεία όπου  $\alpha'(t) = 0$ ) είναι τα  $t = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$$\alpha'(t) = (1 - \cos(t), \sin(t)) \Leftrightarrow \sin(t) = 0 \text{ και } \cos(t) = 1.$$

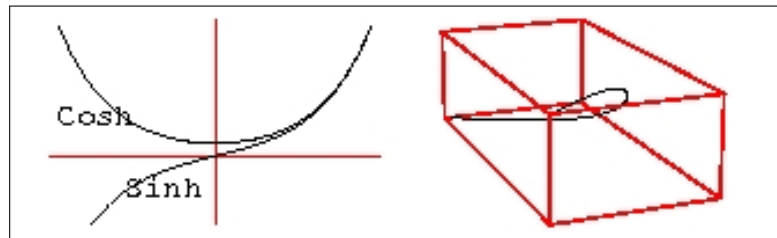
Το μήκος του κυκλοειδούς είναι ίσο με:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} dt = \dots = 8$$

**ερώτηση** Γιατί το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος είναι μικρότερο ή ίσο κάθε άλλης καμπύλης με τα ίδια άκρα;

**3)** Έστω η καμπύλη  $\alpha(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t)$ .

$$\left( \begin{array}{l} \cosh(t) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ υπερβολικό συνιμήτονο} \\ \sinh(t) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \text{ υπερβολικό ημίτονο} \end{array} \right)$$



Σχήμα 1.8: οι καμπύλες  $\cosh$ ,  $\sinh$  και ο υπερβολικός έλικας

Θυμίζουμε ότι:

$$\sinh'(x) = \cosh(x)$$

$$\cosh'(x) = \sinh(x)$$

και

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$



Τώρα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t \sqrt{\sinh^2(t) + \cosh^2(t) + 1} dt \\ &= \int_0^t (\cosh(t)\sqrt{2}) dt \\ &= \sqrt{2} \sinh(t) \end{aligned}$$

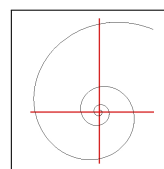
Άρα διαλέγουμε  $t(s) = \sinh^{-1}(\frac{s}{\sqrt{2}})$  και αντικαθιστώντας στην  $\alpha(t)$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= (\cosh(\sinh^{-1}(\frac{s}{\sqrt{2}})), \frac{s}{\sqrt{2}}, \sinh^{-1}(\frac{s}{\sqrt{2}})) \\ &= (1 + \frac{s^2}{2}, \frac{s}{\sqrt{2}}, \sinh^{-1}(\frac{s}{\sqrt{2}})) \\ |\alpha'(s)| &= \dots = 1. \end{aligned}$$

**4)** Έστω η καμπύλη  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\alpha(t) = (ae^{bt} \cos(t), ae^{bt} \sin(t)) = e^{bt}(a \cos(t), a \sin(t))$  με  $a > 0$  και  $b < 0$ .

$$|\alpha(t)| = \frac{|(a \cos(t), a \sin(t))|}{|e^{-bt}|} = \frac{a}{e^{-bt}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (ae^{bt}b \cos(t) - ae^{bt} \sin(t), ae^{bt}b \sin(t) + \\ &\quad + ae^{bt} \cos(t)) \\ &= (\frac{a}{e^{-bt}} \sin(t), b \sin(t) + \cos(t)) \\ |\alpha'(t)| &= \frac{a}{e^{-bt}} |(\dots, \dots)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$



Σχήμα 1.9: λογαριθμικός έλικας

Όταν  $t \rightarrow \infty$  η ταχύτητα τείνει στο 0. Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το μήκος καμπύλης.

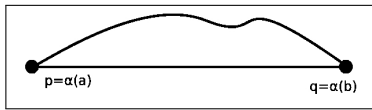
$$\begin{aligned} \int_0^x |\alpha'(t)| dt &= \int_0^x \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2} dt \\ &= t \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2} \Big|_{t=0}^{t=x} \\ &= x \sqrt{(e^{bx} ab \cos(x) - e^{bx} a \sin(x))^2 + (e^{bx} ab \sin(x) + e^{bx} a \cos(x))^2} \\ &= \frac{x}{e^{-bx}} \underbrace{\sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}}_{\text{φραγμένο}} \end{aligned}$$

Άρα  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x |\alpha'(t)| dt$  είναι φραγμένο ( $< \infty$ ).

$$\int_0^\infty |\alpha'(t)| dt = L$$

όπου  $L$  το μήκος της  $\alpha$  από τον χρόνο  $t = 0$  έως  $\infty$ .

5) Έστω  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  καμπύλη με παραμέτρηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $I \supseteq [a, b]$ .



Σχήμα 1.10:  $\alpha(t)$

Έστω  $u$  διάνυσμα σταθερό μέτρου 1.

$$\begin{aligned} \int_a^b \alpha'(t) u dt &= \alpha(t) u \Big|_{t=a}^{t=b} \\ &= [\alpha(b) - \alpha(a)] u \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\int_a^b \alpha'(t) u dt \leq \left| \int_a^b \alpha'(t) u dt \right| \leq \int_a^b |\alpha'(t) u| dt = L(\alpha)$$

Θέτουμε  $u = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{|\alpha(b) - \alpha(a)|}$  και αντικαθιστώντας έχουμε:

$$L(\alpha) \geq [\alpha(b) - \alpha(a)] u \Rightarrow L(\alpha) \geq |\alpha(b) - \alpha(a)|.$$

6) Να βρείτε καμπύλη με παραμέτρηση και ίχνος ίσο με τον μοναδιαίο κύκλο  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  έτσι ώστε να διατρέξει τον κύκλο με την φορά των δεικτών του ρολογιού.

**απάντηση**  $\alpha(t) = (\sin(t), \cos(t))$ .

7) Έστω  $\alpha(t)$  καμπύλη με παραμέτρηση που δεν περνάει από το  $(0, 0)$ . Έστω  $t_0 : |\alpha(t_0) - (0, 0)| \leq |\alpha(t) - (0, 0)|$ . Να δείξετε ότι:  $\alpha(t_0) \perp \alpha'(t_0)$

8) Έστω καμπύλη  $\alpha(t)$  με παραμέτρηση έτσι ώστε  $\alpha''(t) = 0$ . Τι μπορείτε να πείτε για την καμπύλη;

### 1.3 Εξωτερικό Γινόμενο (Διανυσματικό Γινόμενο)

Θα μελετήσουμε την έννοια του προσανατολισμού ενός γραμμικού χώρου. Θα λέμε ότι δύο διατεταγμένες βάσεις ενός διανυσματικού χώρου  $V$  είναι ισοδύναμες εάν ο πίνακας αλλαγής βάσης έχει θετική ορίζουσα. Για παράδειγμα έστω

$e = \{e_i\}_{i=1,\dots,n}$  και  $f = \{f_i\}_{i=1,\dots,n}$ , Εάν οι  $f$  και  $e$  έχουν τον ίδιο προσανατολισμό θε γράφουμε  $e \sim f$ . Η σχέση  $\sim$  είναι σχέση ισοδυναμίας με δύο κλάσεις ισοδυναμίας. Το να επιλέξουμε προσανατολισμό για έναν γραμμικό χώρο είναι ισοδύνομο με το να διαλέξουμε μία από αυτές τις δύο κλάσεις.

**παράδειγμα 1.8.** Θεωρούμε την διατεταγμένη βάση  $e = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ . Ονομάζουμε θετικό προσανατολισμό εκείνον τον προσανατολισμό που αντιστοιχεί σε αυτήν την βάση. Τώρα έστω η διατεταγμένη βάση  $f = \{e_1, e_3, e_2\}$ . Η  $f$  δεν είναι ισοδύναμη με την  $e$  διότι ο πίνακας αλλαγής βάσης είναι,

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \\ f_2 &= 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \\ f_3 &= 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \end{aligned}$$

Η ορίζουσα του πίνακα αλλαγής βάσης είναι:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Η  $f$  είναι αρνητική βάση.

**Ορισμός 1.3.1.** Έστω  $u, v \in \mathbb{R}^3$ . Το **εξωτερικό (διανυσματικό) γινόμενο** του  $u$  με το  $v$  είναι το διάνυσμα  $u \times v \in \mathbb{R}^3$  που χαρακτηρίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$(u \times v) \cdot w = \det(u, v, w) \quad \forall w \in \mathbb{R}^3$$

όπου,

$$\det(u, v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Θεωρώντας  $w = u \times v$  έχουμε:

$$u \times v = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3.$$

**ιδιότητες**

(i)  $u \times v = -v \times u$ .

(ii)  $(ax + by) \times v = a(x \times v) + b(y \times v) = (ax) \times v + (by) \times v$ .

(iii)  $u \times v = 0$  αν και μόνο αν  $u, v$  εξαρτημένα αν  $u, v \neq 0$ .

(iv)  $(u \times v)v = 0$  και  $(u \times v)u = 0$ .

**Παρατήρηση 1.1.** Αν πάρω  $w = u \times v$  στον ορισμό 1.3.1 τότε:

$$(u \times v)(u \times v) = |u \times v|^2 > 0$$

και

$$(u \times v)(u \times v) = \det(u, v, u \times v)$$

Άρα η βάση  $\{u, v, u \times v\}$  είναι θετική βάση.

**Πρόταση 1.3.2.**  $\forall u, v, x, y \in \mathbb{R}^3$  έχουμε:

$$(u \times v)(x \times y) = \begin{vmatrix} ux & vx \\ uy & vy \end{vmatrix}$$

*Απόδειξη.* Αρκεί να δείξω την σχέση αυτή για διανύσματα της βάσης  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Δηλαδή αρκεί να δείξω ότι  $e_i \times e_j, e_k \times e_l$   $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ .

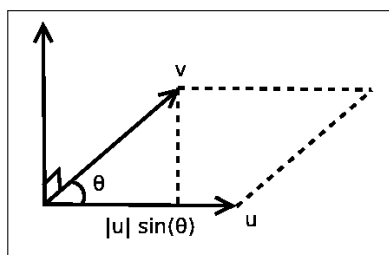
$$(e_i \times e_j)(e_k \times e_l) = \begin{vmatrix} e_i e_k & e_j e_k \\ e_i e_l & e_j e_l \end{vmatrix} = \dots = (ok)$$

□

Από αυτήν την ιδιότητα έπεται ότι:

$$\begin{aligned} |u \times v|^2 &= (u \times v)(u \times v) = |u|^2|v|^2 - |u|^2|v|^2 \cos^2(\theta), \quad \theta = \text{γωνία } u \text{ και } v. \\ &= |u|^2|v|^2(1 - \cos^2(\theta)) \end{aligned}$$

Έστω  $A$  το εμβαδόν του επιπέδου που σχηματίζουν τα διανύσματα  $u$  και  $v$ .



Σχήμα 1.11:  $u \times v$

Το  $u \times v$  είναι δάνυσμα εγκάρσιο στο επίπεδο που ορίζουν τα  $u$  και  $v$ . Έχει μέτρο  $A$  και διεύθυνση τέτοια ώστε η βάση  $\{u, v, u \times v\}$  να είναι θετική.

Έστω  $u, v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  λείες καμπύλες, τότε η  $u \times v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι μία διαφορίσιμη απεικόνιση και μάλιστα,

$$\frac{d}{dt}(u \times v)(t) = \frac{du}{dt} \times v(t) + u(t) \times \frac{dv}{dt}.$$

Το διανυσματικό γινόμενο αναφέρεται σε πολλές γεωμετρικές κατασκευές και ιδιότητες.

**παράδειγμα 1.9.** Έστω οι ευθείες  $\varepsilon_1 : \begin{cases} x - x_0 = u_1 t \\ y - y_0 = u_2 t \\ z - z_0 = u_3 t \end{cases} = \eta$  ευθεί-

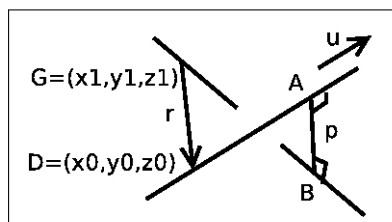
α που περνάει από το σημείο  $(x_0, y_0, z_0)$  με κατεύθυνση  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  και

$\varepsilon_2 : \begin{cases} x - x_1 = v_1 t \\ y - y_1 = v_2 t \\ z - z_1 = v_3 t \end{cases} = \eta$  ευθεία που περνάει από το σημείο  $(x_1, y_1, z_1)$  με

κατεύθυνση  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ .

Έστω ότι οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  δεν τέμνονται ( $\varepsilon_1 \nparallel \varepsilon_2$ ). Έστω διάνυσμα  $\vec{AB}$  που είναι κάθετο και στις δύο ευθείες, όπως το σχήμα 1.12.

Η απόσταση μεταξύ των δύο ευθειών είναι ίση με  $|p| = |\vec{AB}|$  και δίνεται από τον τύπο  $|p| = \frac{|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{r}|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$ .



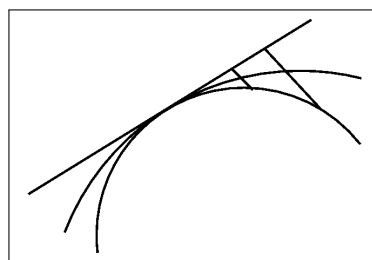
Σχήμα 1.12: παράλληλες ευθείες στον  $\mathbb{R}^3$

$$|\vec{AB}| = pr_{\vec{u} \times \vec{v}}, \quad \vec{r} = |r| \cos(\vartheta) = \frac{|r| \cos(\vartheta) |\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

## 1.4 Τοπική Θεωρία Καμπυλών

Έστω  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  καμπύλη με παραμέτρηση μήκους τόξου  $S \in (a, b)$ . Αφού  $|\alpha'(s)| = 1$  το μέτρο της δεύτερης παραγώγου  $\alpha''(s)$  μας δείχνει τον ρυθμό μεταβολής της εφαπτόμενης ευθείας.

Το  $|\alpha''(s)|$  μετράει το πόσο γρήγορα απομακρύνεται η καμπύλη από το σημείο στο οποίο βρίσκεται (δηλαδή από την εφαπτόμενη ευθεία).



Σχήμα 1.13: ρυθμός μεταβολής εφαπτόμενης ευθείας

**Ορισμός 1.4.1.** Έστω  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  καμπύλη με παραμέτρηση μήκους τόξου  $S$ . Ορίζουμε την **καμπυλότητα** της  $\alpha$  στο σημείο  $s$  να είναι το  $k(s) = |\alpha''(s)|$ .

**παράδειγμα 1.10.** Έστω η καμπύλη  $\alpha(s) = su + v$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Τότε

$$\alpha''(s) = 0 \Rightarrow k(s) = |\alpha''(s)| = 0$$

Δηλαδή η ευθεία έχει καμπυλότητα 0. Ανάποδα τώρα εάν μία καμπύλη έχει την ιδιότητα ότι:  $k(s) = |\alpha''(s)| = 0 \Leftrightarrow \alpha''(s) = 0$  ολοκληρώνοντας δύο φορές έχουμε ότι η  $\alpha$  είναι ευθεία.

**παράδειγμα 1.11.** Έστω η καμπύλη  $\alpha : (-\frac{1}{53}, 2\pi + \frac{1}{53}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$ . Θα υπολογίσουμε την ακμπυλότητα της  $\alpha$ .

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (-\sin(t), \cos(t)) \\ \alpha''(t) &= (-\cos(t), -\sin(t)) \\ |\alpha'(t)| &= \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2} = 1 \\ |\alpha''(t)| &= \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2} = 1\end{aligned}$$

Άρα η καμπυλότητα είναι σταθερή ίση με 1.

**παράδειγμα 1.12.** Έστω ο κύκλος  $x^2 + y^2 = a^2$

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= (a \cos(t), a \sin(t)) \\ \Leftrightarrow \beta(s) &= (a \cos(\frac{s}{a}), a \sin(\frac{s}{a}))\end{aligned}$$

Η  $\beta$  είναι παραμέτρηση ενώ η  $\alpha$  δεν είναι. Θα υπολογίσουμε την καμπυλότητα της καμπύλης.

$$\begin{aligned}|\beta'(s)| &= \sqrt{(-a(\frac{s}{a})' \sin(\frac{s}{a}))^2 + (a(\frac{s}{a})' \cos(\frac{s}{a}))^2} \\ &= \dots = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2} = 1. \\ \beta''(s) &= ((-\sin(\frac{s}{a}))', (\cos(\frac{s}{a}))') = (-\frac{1}{a} \cos(\frac{s}{a}), -\frac{1}{a} \sin(\frac{s}{a})) \\ |\beta''(s)| &= \sqrt{\frac{1}{a^2}(\cos^2 + \sin^2)} = \sqrt{\frac{1}{a^2}} \\ &= \frac{1}{a}.\end{aligned}$$

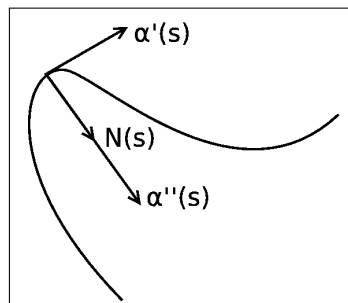
#### 1.4α' Επίπεδο Κίνησης αυθαίρετη ορολογία osculating)

Για τιμές  $s \in I$  για τις οποίες ισχύει  $k(s) \neq 0$  ορίζουμε το κύριο κάθετο διάνυσμα (μοναδιαίο)  $N(s)$  από την εξής σχέση  $\alpha''(s) = k(s)N(s)$ .

Το διάνυσμα  $\alpha''(s)$  είναι κάθετο στο  $\alpha'(s)$  διότι:

$$\begin{aligned} |\alpha'(s)| = 1 &\Rightarrow \alpha'(s)\alpha'(s) = 1 \\ \alpha''(s)\alpha'(s) + \alpha'(s)\alpha''(s) &= 0 \Leftrightarrow \\ \alpha''(s)\alpha'(s) = 0 &\Rightarrow \alpha''(s) \perp \alpha'(s) \end{aligned}$$

Συνεπώς το  $N(s)$  είναι κάθετο στο  $\alpha'(s)$  (εξού και το όνομα κύριο κάθετο). Το επίπεδο που ορίζεται από τα  $\alpha'(s)$  και  $N(s)$  ονομάζεται *επίπεδο κίνησης*. Αν  $k(s) = 0$  τότε το  $N(s)$  δεν ορίζεται. Στην θεωρία μας όμως το επίπεδο κίνησης έχει κεντρικό ρόλο και ως εκ τούτου υποθέτουμε ότι δουλεύουμε με καμπύλες τέτοιες ώστε  $\alpha''(s) \neq 0 \forall s \in I$ .



Σχήμα 1.14: κύριο κάθετο διάνυσμα

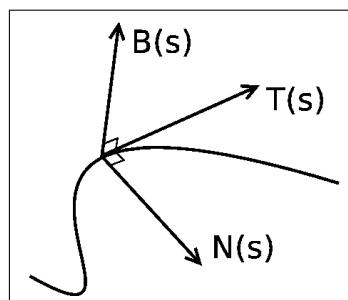
**υπενθύμιση** Ορίσαμε ένα σημείο  $s \in I$  να είναι σημείο ιδιομορφίας εαν ισχύει  $\alpha'(s) = 0$ . Τώρα ορίζουμε ένα σημείο  $s \in I$  να είναι σημείο ιδιομορφίας τάξης 2 εάν  $\alpha''(s) = 0$ .

**Ορισμός 1.4.2** (συμβολισμοί).

- (i)  $T(s) = \alpha'(s)$  μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα.
- (ii)  $T'(s) = \alpha''(s) = k(s)N(s)$  ορίζει το κύριο μοναδιαίο κάθετο  $N(s)$ .
- (iii)  $B(s) := T(s) \times N(s)$  το δικάθετο διάνυσμα στη θέση  $\alpha(s)$ .

Το  $B(s)$  είναι κάθετο στο επίπεδο κίνησης.

Αν θέλουμε να μελετήσουμε το πως αλλάζει το επίπεδο κίνησης όταν μεταβάλεται το  $s$ , αρκεί να κοιτάξουμε πως αλλάζει το αντίστοιχο δικάθετο διάνυσμα (ή ένα οποιοδήποτε εγκάρσιο διάνυσμα). Η μεταβολή του εγκάρσιου εξαρτάται από το μέτρο, άρα ορίσαμε το εγκάρσιο  $B(s)$  το οποίο είναι μέτρου 1 και συνεπώς μετράει σωστά τον ρυθμό μεταβολής. Στη συνέχεια θα δούμε ότι  $B'(s) \parallel N(s)$ .



Σχήμα 1.15: επίπεδο κίνησης μίας καμπύλης

$$\begin{aligned} B'(s) &= (T(s) \times N(s))' \\ &= T'(s) \times N(s) + T(s) \times N'(s) \\ &= (T'(s) \parallel N(s)) = 0 + T(s) \times N'(s) \\ &\Rightarrow B'(s) \perp T(s) \end{aligned}$$

Όμως  $B'(s) \perp B(s)$ , άρα το  $B'(s)$  είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα  $T(s)$  και  $B(s)$ . Επίσης το  $N(s)$  είναι κάθετο σε αυτό το επίπεδο. Άρα  $B'(s) \parallel N(s)$  και άρα  $\exists$  αριθμός  $t(s)$  τέτοιος ώστε  $B'(s) = t(s)N(s)$ .

**Ορισμός 1.4.3.** Έστω  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  καμπύλη τέτοια ώστε  $\alpha''(s) \neq 0, \forall s \in I$ , ( $s$  παραμέτρηση μήκους τόξου). Ο αριθμός  $t(s)$  που ορίζεται από την σχέση:  $B'(s) = t(s)N(s)$  ονομάζεται **συστροφή** της  $\alpha$  στο  $s \in I$ .

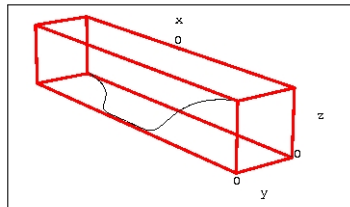
**Παρατήρηση 1.2.** Αν  $\alpha$  είναι επίπεδη καμπύλη (δηλαδή το ίχνος της  $\alpha$  περιέχεται σε ένα ακριβώς επίπεδο στον  $\mathbb{R}^3$ ) τότε το  $B(s)$  είναι πάντα μέτρου 1 και πάντα παράλληλο με τον άξονα  $zz'$ . Άρα  $B'(s) = 0 \Rightarrow t(s) = 0$ .

Αντίστροφα αν  $t(s) = 0 \forall s \in I$  τότε υποθέτοντας ότι  $k(s) \neq 0, \forall s$  έχουμε ότι  $B'(s) = 0 \cdot N(s) = 0$ , άρα  $B(s) = B_0$  σταθερό. Άρα  $(\alpha(s)B_0)' = \alpha'(s)B_0 + B_0'\alpha(s) = 0$ . Όμως  $B_0' = 0$  και άρα  $\alpha'(s) \perp B_0$ . Άρα  $\alpha(s)B_0 = \text{σταθερό}$ . Και άρα το  $\alpha(s)$  περιέχεται σε επίπεδο σταθερής γωνίας με το  $B_0$ .

**παράδειγμα 1.13.** Έστω η καμπύλη,

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-\frac{1}{t^2}}) & , t > 0 \\ (t, e^{-\frac{1}{t^2}}, 0) & , t < 0 \\ 0 & , t = 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η  $\alpha(t)$  είναι κανονική διαφορίσιμη καμπύλη. Επίσης ότι



$k(t) = 0$  για  $t = 0$  και ότι το  $B(t)$  δεν είναι συνεχής στο  $t = 0$ . Το δικάθετο δεν συμπεριφέρεται με συνεχή τρόπο στο  $t = 0$ .

$$t \rightarrow 0^+ \Rightarrow B(t) \rightarrow (1, 0, 0)$$

$$t \rightarrow 0^- \Rightarrow B(t) \rightarrow (0, 0, 1)$$

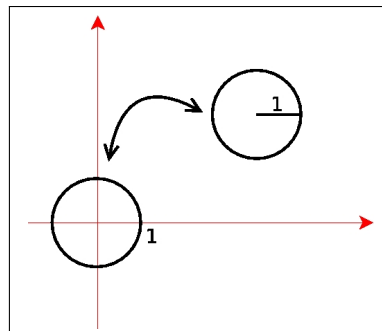
Σχήμα 1.16:  
η καμπύλη  $\alpha(t)$

**Θεώρημα 1.4.4** (θεμελιώδες θεώρημα τοπικής θεωρίας καμπυλών). Έστω  $I$  ανοιχτό, όχι κατ'ανάγκη φραγμένο, διάστημα και  $k, t : I \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχείς με  $k(s) > 0$ . Τότε υπάρχει καμπύλη  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  τέτοια ώστε,

- (i)  $s$  παραμέτρηση μήκους τόξου για την  $\alpha$ ,
- (ii)  $k(s)$  ισούτε με την καμπυλότητα της  $\alpha$  στο  $s$ ,
- (iii)  $t(s)$  ισούτε με την συστροφή της  $\alpha$  στο  $s$ .



Αν  $\tilde{\alpha}$  είναι μία άλλη καμπύλη που ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες, τότε  $\exists f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  γραμμική με ορίζουσα  $+1$  (δεν αλλάζει προσανατολισμό) και διάνυσμα  $\vec{c}$  τέτοια ώστε  $\tilde{\alpha} = f\alpha + \vec{c}$  (βλ. παράδειγμα στο σχήμα 1.17).



Σχήμα 1.17: παράδειγμα

### 1.4β' Ανακεφαλαίωση

Για κάθε τιμή της παραμέτρου  $s$  (μήκους τόξου) ορίσαμε τρία μοναδιαία ορθοκανονικά διανύσματα, τα  $T(s), Ni(s), B(s)$ . Τα τρία αυτά διανύσματα ορίζουν ένα τριέδρο που ονομάζεται **τριέδρο Frenet** στο  $s$ . Οι παράγωγοι  $T'(s)$  και  $B'(s)$ ,

$$T'(s) = k(s)N(s) \quad \text{καμπυλότητα}$$

$$B'(s) = t(s)N(s) \quad \text{συστροφή}$$

ορίζουν γεωμετρικές ποσότητες (καμπυλότητα και συστροφή) οι οποίες μας δίνουν πληροφορίες για την κίνηση της  $\alpha$  στο  $s$ . Είναι εύκολο να εκφράσουμε και την  $N'(s)$  στη βάση  $\{T, N, B\}$ .

$$\begin{aligned} N &= B \times T \\ N'(s) &= B'(s) \times T(s) + B(s) \times T'(s) \\ &= [t(s)N(s)] \times T(s) + B(s) \times [k(s)N(s)] \\ &= t(s)[N(s)] \times T(s) + k(s)[B(s) \times N(s)] \\ &= -t(s)B(s) - k(s)T(s). \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} T' &= kN \\ B' &= tN \\ N' &= -tB - kT. \end{aligned}$$

### 1.4γ' Ασκήσεις - Παραδείγματα

1) Έστω  $\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$  ο κυλινδρικός έλικας (σχήμα 1.1). Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (-a \sin(t), a \cos(t), b) \\ \Rightarrow \alpha'(t) \cdot (0, 0, 1) &= b\end{aligned}$$

Άρα η καμπύλη έχει σταθερή γωνία με τον άξονα των  $z$ . Θα υπολογίσουμε τις ποσότητες Frenet.

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= \left( a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \\ \alpha'(s) &= \left( -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = T(s) \\ T'(s) &= \left( -\frac{a}{a^2 + b^2} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), -\frac{a}{a^2 + b^2} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), 0 \right) \\ k(s) &= \|\alpha''(s)\| = \|T'(s)\| = \frac{a}{a^2 + b^2}\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε το κύριο κάθετο  $N(s)$  από την Frenet σχέση:

$$T' = k \cdot N \Rightarrow N(s) = \left( -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), 0 \right).$$

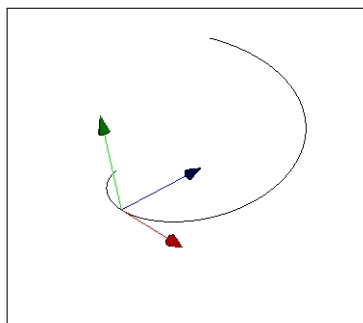
Στη συνέχεια υπολογίζουμε το δικάθετο,

$$B = T \times N = \dots = \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Υπολογίζουμε την συστροφή (στρέψη) από την Frenet σχέση:

$$\begin{aligned}B' &= t \cdot N \\ B'(s) &= \left( \frac{b}{a^2 + b^2} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{b}{a^2 + b^2} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), 0 \right) \\ \Rightarrow t(s) &= -\frac{b}{a^2 + b^2}.\end{aligned}$$

Στο σχήμα 1.18 βλέπουμε τα διανύσματα  $T, N$  και  $B$  στην καμπύλη του έλικα. Με κόκκινο χρώμα βλέπουμε το διάνυσμα  $T$ , με μπλε το διάνυσμα  $N$  και με πράσινο το διάνυσμα  $B$ .



Σχήμα 1.18: Τα διανύσματα  $T, N, B$  στον έλικα, σχήμα μεγενθυμένο

2) Έστω η καμπύλη  $\alpha(s) = \left( \frac{(1+s)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{(1-s)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$ ,  $s \in (-1, 1)$ ,

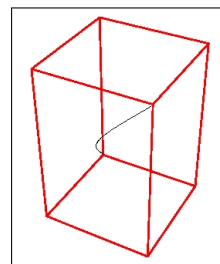
$$T(s) = \alpha'(s) = \left( \frac{\sqrt{1+s}}{2}, -\frac{\sqrt{1-s}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$|\alpha'(s)| = \sqrt{\frac{1+s}{4} + \frac{1-s}{4} + \frac{1}{2}} = 1$$

Άρα  $s$  παραμέτρηση μήκους τόξου.

$$\alpha''(s) = T'(s) = \left( \frac{1}{4\sqrt{1+s}}, \frac{1}{4\sqrt{1-s}}, 0 \right)$$

$$\begin{aligned} k(s) &= \|\alpha''(s)\| \\ &= \sqrt{\frac{1}{16(1+s)} + \frac{1}{16(1-s)}} \\ &= \sqrt{\frac{1-s+1+s}{16(1-s^2)}} = \frac{1}{\sqrt{8(1-s^2)}} \end{aligned}$$



Σχήμα 1.19:  $\alpha(s) = \left( \frac{(1+s)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{(1-s)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$

Το κύριο κάθετο διάνυσμα υπολογίζεται από την σχέση:  $T' = kN$ .

$$\begin{aligned} N(s) &= \frac{1}{k(s)} T'(s) \\ &= \sqrt{8(1-s^2)} \left( \frac{1}{4\sqrt{1+s}}, \frac{1}{4(1-s)}, 0 \right) \\ &= \left( \sqrt{\frac{1-s}{2}}, \sqrt{\frac{1+s}{2}}, 0 \right). \end{aligned}$$

Το δικάθετο υπολογίζεται από την σχέση:  $B = T \times N$ ,

$$\begin{aligned} B(s) &= \dots = \left( -\frac{\sqrt{1+s}}{2}, \frac{\sqrt{1-s}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ B'(s) &= \left( -\frac{1}{4\sqrt{1+s}}, -\frac{1}{4\sqrt{1-s}}, 0 \right) \\ &= \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{8(1-s^2)}}}_{t(s)} \underbrace{\left( \frac{\sqrt{2}\sqrt{1-s}}{2}, \frac{\sqrt{2}\sqrt{1+s}}{2}, 0 \right)}_{N(s)} \end{aligned}$$

**3)** Να υπολογίσετε τα στοιχεία Frenet της καμπύλης του υπερβολικού έλικα:  $\alpha(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t)$  (σχήμα 1.8). Θυμίζουμε ότι:

$$\tanh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$$

**απάντηση**

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \tanh(t), 1, \frac{1}{\cosh(t)} \right) \\ B &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\tanh(t), 1, -\frac{1}{\cosh(t)} \right) \\ N &= \left( \frac{1}{\cosh(t)}, 0, -\tanh(t) \right) \\ k &= \frac{1}{2 \cosh^2(t)} \end{aligned}$$

**4)** Όμοια για την καμπύλη  $\alpha(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t)$

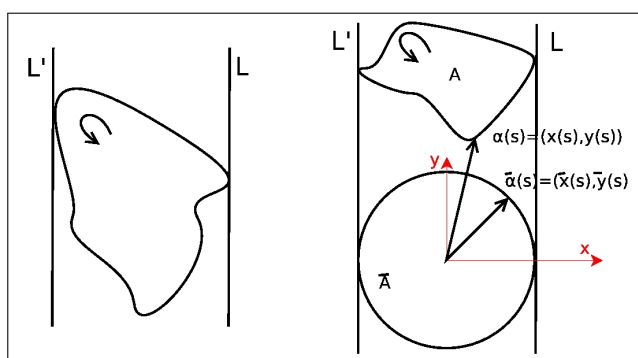
## 1.5 Ισοπεριμετρική Ανισότητα

Έστω  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Η  $f$  είναι διαφορίσιμη εάν είναι περιορισμός μίας διαφορίσιμης ορισμένης σε διάστημα  $I$ ,  $I \supset [a, b]$ .

**Ορισμός 1.5.1.** Μία **κλειστή καμπύλη** είναι μία  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  διαφορίσιμη τέτοια ώστε,  $\alpha(a) = \alpha(b)$ ,  $\alpha'(a) = \alpha'(b)$ ,  $\alpha''(a) = \alpha''(b)$  κ.ο.κ. για κάθε τάξη. Επίσης η  $\alpha$  λέγεται **απλή** αν  $f|_{[a,b]}$  είναι 1-1.

Θυμίζουμε το θεώρημα Green από τον απειροστικό λογισμό 4.

**Θεώρημα 1.5.2** (θεώρημα Green). Έστω  $C \subseteq \mathbb{R}^2$  απλή κλειστή καμπύλη με μήκος  $l$  και εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται  $A$ . Τότε  $l^2 - 4\pi A \geq 0$  και το ίσον ισχύει αν και μόνο αν ο  $C$  είναι κύκλος.



Σχήμα 1.20: θεώρημα Green

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^l x(s)y'(s)ds \\
 \left. \begin{aligned}
 \pi r^2 + A &= \int_0^l xy' - \bar{y}x' ds \\
 &\leq \int_0^l \sqrt{xy' - \bar{y}x'} ds \\
 &\leq \int_0^l \sqrt{\bar{y}^2 + \bar{x}^2[(x')^2 + (y')^2]} ds \\
 &= \int_0^l \sqrt{\bar{y}^2 + \bar{x}^2} ds = r \cdot l.
 \end{aligned} \right\} (*)
 \end{aligned}$$

Από την γνωστή ανισότητα  $\sqrt{q}\sqrt{p} \leq \frac{q+p}{2}$  έχουμε ότι,

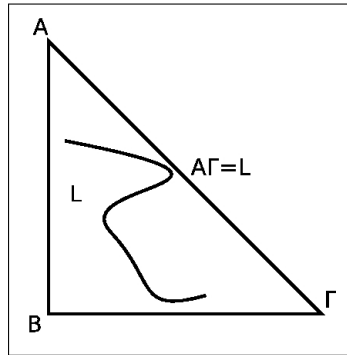
$$(**) \sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} \leq \frac{A + \pi r^2}{2} \leq \frac{rl}{2} \Rightarrow 4A\pi r^2 \leq r^2 l^2 \Rightarrow l^2 - 4\pi A \geq 0.$$

όπως το θέλαμε. Εάν  $l^2 = 4\pi A$  τότε ισχύουν οι ισότητες (\*\*) και (\*). Άρα  $A = \pi r^2 \Rightarrow l^2 = 4\pi^2 r^2 \Rightarrow l = 2\pi r$ . Αποδυναύεται ότι  $x(s) = \pm r y'(s)$  και  $y(s) = \pm r x'(s)$ .

$$x^2 + y^2 = r^2(y^2 + x^2) = r^2$$

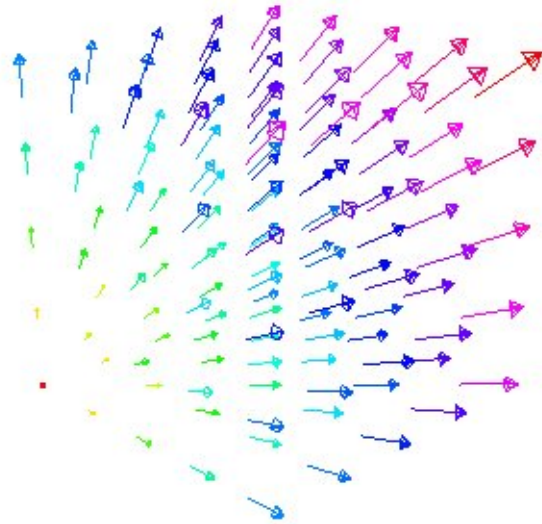
□

**άσκηση** Να δείξετε ότι υπάρχει ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο  $T$  υποτίνουσας  $L$  το οποίο σχεπάζει ένα σχηνάκι μήκους  $L$  το οποίο έχει πέσει στην γη “στην τύχη”.



Σχήμα 1.21: σχηνάκι μήκους  $L$  και ορθογώνιο τρίγωνο υποτίνουσας  $L$







# ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^3$

---

## 2.1 Διαφορισιμότητα Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών

Εάν  $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση θα συμβολίζουμε τις μερικές παραγώγους της  $f$  ως προς  $x$  ή  $y$  στο σημείο  $(x_0, y_0)$  με  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  ή αντίστοιχα με  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ . Όμοια αν  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  θα συμβολίζουμε την μερική παράγωγο ως προς την πρώτη συντεταγμένη με  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})$ .

### 2.1α' Κανόνας Αλυσίδας

Έστω,

$$\left. \begin{array}{l} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{array} \right\} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

και  $f(x, y, z)$  διαφορίσιμη με πεδίο τιμών το  $\mathbb{R}^3$ . Τότε η σύνθεση:

$$f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad U \xrightarrow{x, y, z} \left\{ \begin{array}{l} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{array} \right\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

είναι διαφορίσιμη στο  $U$  και οι μερικές παράγωγοι της  $f$  ως προς  $u$  δίνεται από την σχέση:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}.$$

Όμοια ως προς  $v$ .

Όλα τα παραπάνω ισχύουν για πραγματικές συναρτήσεις. Έστω ότι το πεδίο τιμών είναι το  $\mathbb{R}^m$ . Μία συνάρτηση  $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  θα λέγεται διαφορίσιμη στο  $p \in U$  εάν οι συντεταγμένες συναρτήσεις της  $F$ ,  $(F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), F_2(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n)))$  είναι διαφορίσιμες στο  $p$ , έχουν δηλαδή μερικές παραγώγους κάθε τάξεως στο  $p$ .

**παράδειγμα 2.1.** Έστω  $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$   $F(u, v) = (\cos(u) \sin(v), \cos(u) \cos(v), uv)$ . Οι συντεταγμένες συναρτήσεις,

$$\begin{aligned} F_1(u, v) &= \cos(u) \sin(v) \\ F_2(u, v) &= \cos(u) \cos(v) \\ F_3(u, v) &= uv \end{aligned}$$

έχουν μερικές παραγώγους ως προς  $u$  και  $v$  κάθε τάξης  $\forall p \in U$ . Άρα η  $F$  είναι διαφορίσιμη στο  $U$ .

**Παρατήρηση 2.1.** Έστω  $w \in \mathbb{R}^m$  τυχαίο σημείο και  $p \in \mathbb{R}^m$ . Υπάρχει πάντα καμπύλη  $\alpha$  για την οποία ισχύει:

$$\alpha(0) = p \text{ και } \alpha'(0) = w,$$

την χρονική στιγμή περνάει από το  $p$  και έχει παράγωγο  $w$ .

Διότι, αν  $\alpha(t) = (p_1, \dots, p_m) + tw$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  για  $t = 0$  προφανώς  $\alpha(0) = p$  και  $\alpha'(0) = (p_1 + tw_1, p_2 + tw_2, \dots, p_m + tw_m) = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ .

**Ορισμός 2.1.1** (Διαφορικό). Έστω  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  διαφορίσιμη. Σε κάθε σημείο  $p \in U$  αντιστοιχίζουμε μία (γραμμική) απεικόνιση  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  (η οποία λέγεται **διαφορικό** της  $f$  στο  $p$ ) ως εξής: Έστω  $w \in \mathbb{R}^n$ . Από την παρατήρηση 2.1 υπάρχει καμπύλη  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  με  $\alpha(0) = p$  και  $\alpha'(0) = w$ . Η σύνθεση  $\beta = f \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$  είναι διαφορίσιμη (από κανόνα αλυσίδας), οπότε το  $\beta'(0)$  είναι εξόρισμού το  $dF_p(w)$ .

**Πρόταση 2.1.2.** Ο ορισμός του διαφορικού  $dF_p$  δεν εξαρτάται από την επιλογή της καμπύλης  $\alpha$  και επιπλέον  $dF_p$  είναι γραμμική.

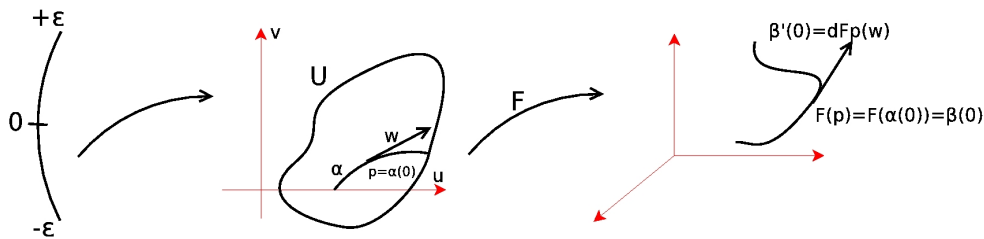
*Απόδειξη.* Για απλούστευση του συμβολισμού υποθέτουμε ότι  $n = 2$  και  $m = 3$ .

Έστω  $(u, v)$  συντεταγμένες του  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  και  $(x, y, z)$  συντεταγμένες του  $\mathbb{R}^3$ . Θεωρώ  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$  και  $f_1 = (1, 0, 0)$ ,  $f_2 = (0, 1, 0)$ ,  $f_3 = (0, 0, 1)$  οι στάνταρ βάσεις του  $\mathbb{R}^2$  και  $\mathbb{R}^3$ . Τότε έχουμε  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $\alpha'(t) = (u'(t), v'(t))$ .

$$w = \alpha'(0) = u'(0)e_1 + v'(0)e_2 = (u'(0), v'(0))$$

$$\begin{aligned}
F(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\
\beta(t) &= (F \circ \alpha)(t) = F(\alpha(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \\
dF_p &= \beta'(0) = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right) \\
&= \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right) f_1 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right) f_2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right) f_3 \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση  $dF_p$  παριστάνεται ως προς τις κανονικές βάσεις



$\{e_1, e_2\}$ ,  $\{f_1, f_2, f_3\}$  του  $\mathbb{R}^2$  και  $\mathbb{R}^3$  αντίστοιχα, με τον πίνακα:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Η  $dF_p$  είναι γραμμική και ο ορισμός της δεν εξαρτάται από την επιλογή της καμπύλης  $\alpha$ . Ο πίνακας  $\left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{i=1, \dots, m}$ ,  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)$  και  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  σημεία του  $\mathbb{R}^m$ , ονομάζεται ιακωβιανή της  $F$  στο  $p$ . Αν  $n = m$  ο πίνακας αυτός είναι τετραγωνικός, άρα υπάρχει η  $\det \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)$ , η οποία λέγεται ιακωβιανή ορίζουσα.  $\square$

**παράδειγμα 2.2.** Έστω  $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ .

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2}} &= dF_p \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x} & \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y} \\ \frac{\partial 2xy}{\partial x} & \frac{\partial 2xy}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

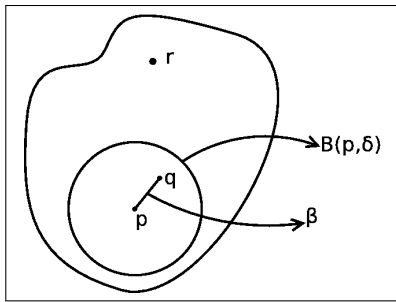
Έστω  $p = (1, 1)$  και  $w = (2, 3)$  τότε,

$$dF_{(1,1)}(2, 3) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (-2, 10)$$

**Θεώρημα 2.1.3** (κανόνας αλυσίδας). Έστω  $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  και  $G : V \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  με  $F(U) = V$ ,  $F, G$  διαφορίσιμες και  $U, V$  ανοιχτά. Τότε η  $G \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  είναι διαφορίσιμη σε κάθε  $p \in U$  και  $d(G \circ F)_p = dF_{F(p)} \circ dG_{F(p)}$ .

**Θεώρημα 2.1.4.** Έστω  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ανοιχτό και συνεκτικό και  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  διαφορίσιμη. Εάν  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μηδέν σε κάθε  $p \in U$  τότε η  $F$  είναι σταθερή.

*Απόδειξη.* Έστω  $p \in U$  και  $B(p, \delta) \subseteq U$  μπάλα κέντρου  $p$  με ακτίνα  $\delta$ . Έστω  $q \in B(p, \delta)$  τυχαίο. Θεωρώ το ευθύγραμμο τμήμα  $\beta : [0, 1] \rightarrow B(p, \delta)$   $\beta(t) = tq + (1-t)p$ . Η  $\beta$  (ορισμένη κατάλληλα σε ανοιχτό διάστημα) είναι διαφορίσιμη. Άρα είναι διαφορίσιμη και η  $F \circ \beta$ ,  $F \circ \beta : (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ . Από κανόνα αλυσίδας  $d(F \circ \beta)(t) = dF(\beta(t))d\beta(t) = 0$ . Με άλλα λόγια η  $F \circ \beta$  έχει παράγωγο 0 παντού. Άρα είναι σταθερή,  $(F \circ \beta)(0) = (F \circ \beta)(1)$ ,  $F(p) = F(q)$ . Και αφού το  $q$  είναι τυχαίο έχουμε ότι η  $F$  είναι σταθερή στη  $B(p, \delta)$ .

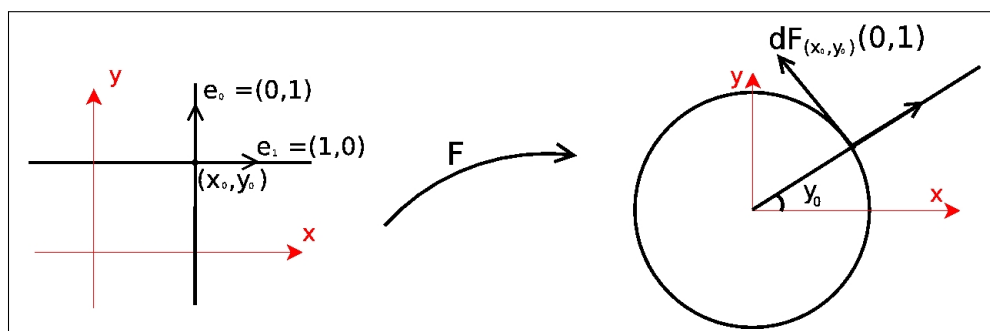


Σχήμα 2.1: η μπάλα  $B(p, \delta)$

Τώρα έστω  $r \in U$  τυχαίο και έστω  $\alpha : [a, b] \rightarrow U$  με  $\alpha(a) = p$  και  $\alpha(b) = r$ . Η  $F \circ \alpha$  είναι συνεχής και σύμφωνα με το παραπάνω επιχείρημα είναι σταθερή σε κάθε ανοιχτή μπάλα. Δηλαδή  $\forall t \in [a, b] \exists$  μπάλα  $B(\alpha(t), \delta_t)$  έτσι ώστε  $F$  σταθερή στη  $B(\alpha(t), \delta_t)$ , με άλλα λόγια,  $\forall t \in [a, b] \exists$  διάστημα  $I_t \subseteq [a, b]$  τέτοιο ώστε  $F \circ \alpha$  σταθερή στο  $I_t$ . Από την συμπάγεια του  $[a, b]$  έχουμε ότι υπάρχουν  $I_1, I_2, \dots, I_k$  τέτοια ώστε η  $F$  να είναι σταθερή σε κάθε διάστημα  $I_i \cap I_{i+1} \neq \emptyset$ . Τελικώς  $F$ : σταθερή,  $F(p) = F(q)$ .  $\square$

**Θεώρημα 2.1.5** (αντίστροφης συνάρτησης). Έστω  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  διαφορίσιμη και έστω  $p \in U$  με  $dF_p$  : ισομορφισμός. Τότε υπάρχει περιοχή  $V$  του  $p$  στο  $U$  και  $W$  του  $F(p)$  στο  $\mathbb{R}^n$  έτσι ώστε η  $F|_V : V \rightarrow W$  να είναι αμφιδιαφόριση (1-1, επί και η  $F^{-1}$  διαφορίσιμη).

**παράδειγμα 2.3.** Έστω  $F(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$ ,  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Οι συντεταγμένες συναρτήσεις της  $F$  είναι οι  $u(x, y) = e^x \cos(y)$ ,  $v(x, y) = e^x \sin(y)$ , οι οποίες έχουν μερικές παραγώγους κάθε τάξεως. Άρα η  $F$  είναι διαφορίσιμη. Η καμπύλη  $x \rightarrow (x, y_0)$  απεικονίζεται στην ημιευθεία κλίσης  $y_0$  και η καμπύλη  $y \rightarrow (x_0, y)$  απεικονίζεται στον κύκλο κέντρου  $(0, 0)$  και ακτίνας  $e^{x_0}$ . Τώρα έχουμε ότι  $dF_{(x_0, y_0)}(1, 0) =$  (το εφαπτόμενο διάνυσμα της εικόνας



Σχήμα 2.2:  $(e^x \cos(y), e^x \sin(y))$

της  $x \rightarrow (x, y_0) = \frac{d}{dx}(e^x \cos(y_0), e^x \sin(y_0))|_{x=x_0} = (e^{x_0} \cos(y_0), e^{x_0} \sin(y_0))$  και  $dF_{(x_0, y_0)}(0, 1) =$  (εφαπτόμενο διάνυσμα της εικόνας της  $y \rightarrow (x_0, y) = \frac{d}{dy}(e^{x_0} \cos(y), e^{x_0} \sin(y))|_{y=y_0} = (-e^{x_0} \sin(y_0), e^{x_0} \cos(y_0))$ . Η ιακωβιανή της  $F$  στο σημείο  $(x, y)$  είναι:

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \end{pmatrix}$$

Η ορίζουσα της ιακωβιανής είναι:

$$|J_F(x, y)| = e^x \cos^2(y) + e^x \sin^2(y) \neq 0 \quad \forall (x, y)$$

Άρα  $dF_{(x, y)}$  είναι ισομορφισμός  $\forall (x, y)$ . Όμως η  $F$  δεν είναι 1-1, άρα από θεώρημα αντίστροφου συναρτήσεως υπάρχουν ανοιχτές περιοχές  $V, W : F|_V : V \rightarrow W$  είναι αμφιδιαφόριση. Για παράδειγμα,

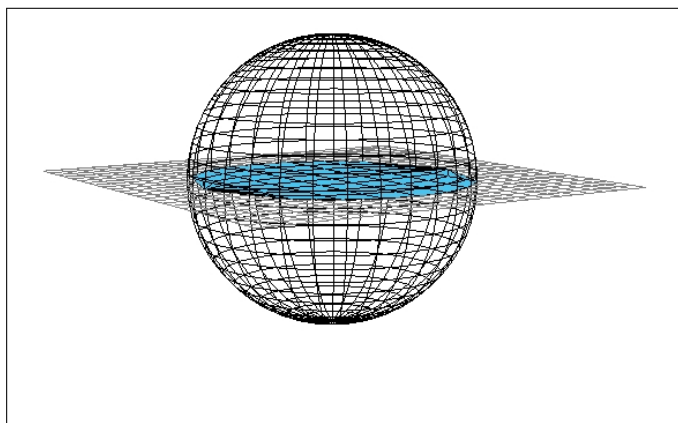
$$\begin{aligned} V &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -\infty < x < \infty, 0 < y < 2\pi\} \\ W &= \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

## 2.2 Κανονικές Επιφάνειες

Ένα υποσύνολο  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  θα λέγεται κανονική επιφάνεια εάν  $\forall p \in S$  υπάρχει μία περιοχή  $V$  του  $\mathbb{R}^3$  έτσι ώστε:

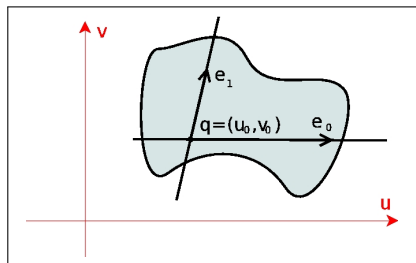
- (i)  $\exists u \subseteq \mathbb{R}^2$  ανοιχτό και  $f : u \rightarrow S \cap V$  επί.
- (ii)  $f$  διαφορίσιμη (οι μερικές παράγωγοι κάθε τάξεως υπάρχουν).
- (iii)  $f$  είναι ομοιομορφισμός (δηλαδή η  $f$  είναι 1-1 και  $f^{-1}$  είναι συνεχής).
- (iv) (κανονικότητα)  $\forall q \in U$  το διαφορικό  $dF_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  είναι 1-1.

Η απεικόνιση  $f$  ονομάζεται παραμετρικοποίηση ή σύστημα συντεταγμένων στο  $p$ .



Σχήμα 2.3: τομή σφαίρας και ενός επιπέδου

Στο παραπάνω σχήμα υποθέτουμε ότι το σύνολο  $S$  είναι το επίπεδο, το σύνολο  $V$  είναι η σφαίρα και ότι το σημείο  $p$  βρίσκεται στην τομή  $S \cap V$ .



Σχήμα 2.4: το σημείο  $q$

Έστω  $q = (x_0, y_0) \in U$  και έστω  $(1, 0), (0, 1)$  η κανονική βάση του  $\mathbb{R}^2$  (συντεταγμένες  $u, v$ ) και  $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$  η κανονική βάση του  $\mathbb{R}^3$  (συντεταγμένες  $x, y, z$ ). Το  $(1, 0)$  είναι εφαπτόμενο του  $u \rightarrow (u, v_0)$  και το  $(0, 1)$  είναι εφαπτόμενο του  $v \rightarrow (u_0, v)$  και εικόνες αυτών των καμπυλών έχουν εφαπτόμενα διανύσματα, τα διανύσματα:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) &= \frac{\partial f}{\partial u} \\ \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) &= \frac{\partial f}{\partial v} \end{aligned}$$

Εξόρισμού του διαφορικού  $dF_q(e_1) = \frac{\partial f}{\partial u}$  και  $dF_q(e_2) = \frac{\partial f}{\partial v}$  ο πίνακας του διαφορικού είναι  $dF_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

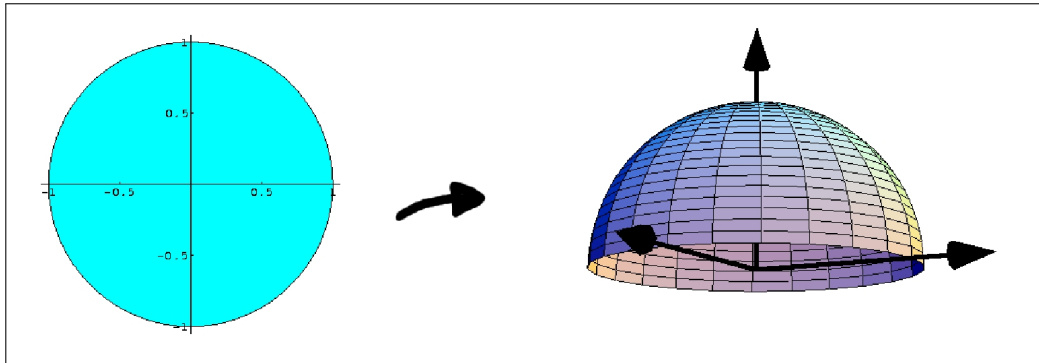
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Η συνθήκη (iv) λέει ότι το διαφορικό είναι 1-1 ή ισοδύναμα  $\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \neq 0$  ή ότι τα  $\frac{\partial f}{\partial u}$  και  $\frac{\partial f}{\partial v}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

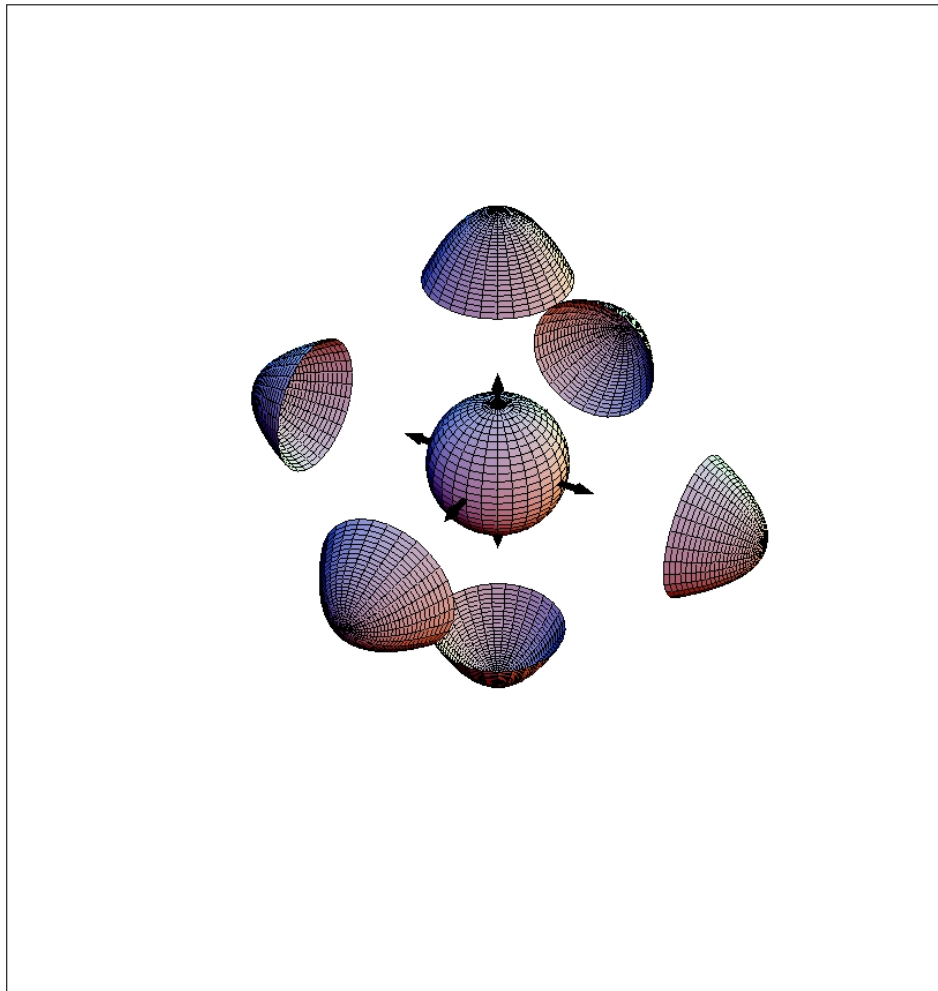
**παράδειγμα 2.4.** Η μοναδιαία σφαίρα  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  είναι κανονική επιφάνεια. Έστω η απεικόνιση  $f_1 : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  όπου  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$  και  $f_1(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ . Στο σχήμα 2.5 βλέπουμε την απεικόνιση από το  $U$  στο  $f_1(U)$  που είναι το ανοιχτό άνω ημισφαίριο της  $S^2$ . Οι συντεταγμένες συναρτήσεις της  $f$  έχουν μερικές παραγώγους κάθε τάξεως, άρα η  $f_1$  είναι διαφορίσιμη. Το διαφορικό της  $f_1$  δίνεται από τον πίνακα:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \\ \frac{\partial \sqrt{1-x^2-y^2}}{\partial x} & \frac{\partial \sqrt{1-x^2-y^2}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}.$$

Άρα  $dF_1$  είναι 1-1. Η  $F^{-1}$  είναι ο περιορισμός της προβολής  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y, z) \mapsto (x, y)$  στο άνω ημισφαίριο  $f_1(U)$ , άρα η  $f_1$  είναι συνεχής.



Σχήμα 2.5: Η απεικόνιση  $f_1$  από τον κυκλικό δίσκο στο ανοιχτό άνω ημισφαίριο της  $S^2$



Σχήμα 2.6: κάλυψη της σφαίρας  $S^2$



Μένει να καλύψουμε όλη την  $S^2$  (σχήμα 2.6). Αυτό θα γίνει με τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$f_2(x, y, z) = (x, y, -\sqrt{z})$$

$$f_3(x, y, z) = (x, +\sqrt{z}, z)$$

$$f_4(x, y, z) = (x, -\sqrt{z}, z)$$

$$f_5(x, y, z) = (+\sqrt{z}, y, z)$$

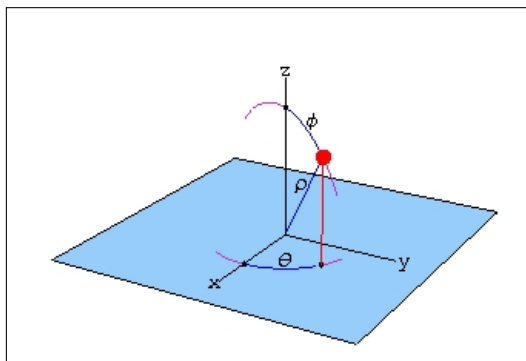
$$f_6(x, y, z) = (-\sqrt{z}, y, z)$$

### 2.2α' Σφαιρικές Συντεταγμένες

$$0 \leq \phi \leq \pi$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\rho > 0$$



Σχήμα 2.7: σφαιρικές συντεταγμένες

#### παράδειγμα 2.5.

$$S^2 = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

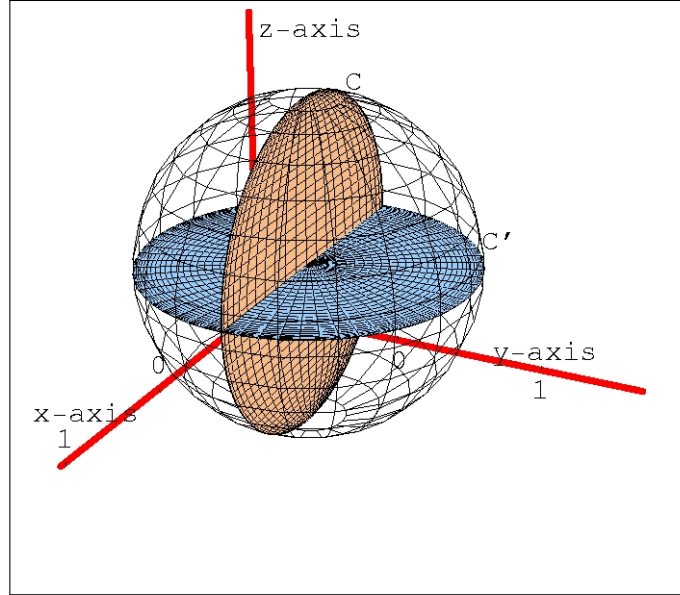
Θεωρούμε  $V = \{(\theta, \phi) / 0 < \theta < 2\pi, 0 < \phi < \pi\}$  και  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(\theta, \phi) = (\cos(\theta) \sin(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\phi))$ . Η  $f$  είναι παραμετροποίηση για την  $S^2$ .

Οι συντεταγμένες της  $f$  (δηλαδή  $\cos(\theta) \sin(\phi)$ ,  $\sin(\theta) \sin(\phi)$ ,  $\cos(\phi)$ ) έχουν μερικές παραγώγους κάθε τάξεως, άρα  $f$  διαφορίσιμη. Το διαφορικό της  $f$  δίνεται από τον πίνακα:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(\cos(\theta) \sin(\phi))}{\partial\theta} & \frac{\partial(\cos(\theta) \sin(\phi))}{\partial\phi} \\ \frac{\partial(\sin(\theta) \sin(\phi))}{\partial\theta} & \frac{\partial(\sin(\theta) \sin(\phi))}{\partial\phi} \\ \frac{\partial(\cos(\phi))}{\partial\theta} & \frac{\partial(\cos(\phi))}{\partial\phi} \end{pmatrix}$$

Άρα το διαφορικό της  $f$  σε σημείο  $(\theta, \phi)$ ,  $df_{(\theta, \phi)}$  είναι 1-1.

Τώρα έστω  $C = \{(x, y, z) \in S^2 / x \geq 0, y = 0\}$ , όπως το σχήμα 2.8. Προφανώς  $f(V) = S^2 \setminus C$ . Έστω  $p \in S^2 \setminus C$ . Το  $\phi$  του σημείου αυτού



Σχήμα 2.8: η σφαίρα  $S^2$  με τα επίπεδα  $y = 0$  και  $z = 0$

καθορίζεται μοναδικά από την σχέση:  $\phi = \cos^{-1}(z)$ . Για δοσμένο  $\phi$  βρίσκω μοναδικά το  $\theta$  από την σχέση:

$$\left. \begin{array}{l} \cos(\theta) \sin(\phi) = x \\ \sin(\theta) \sin(\phi) = y \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \cos(\theta) = \frac{x}{\sin(\phi)} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{\sin(\phi)} \end{array}.$$

Για τυχόν  $p = (x, y, z) \in S^2 \setminus C$ ,  $\exists!$   $(\theta, \phi) f(\theta, \phi) = (x, y, z) = p$ . Ορίζω το σύνολο  $C' = \{(x, y, z) \in S^2 / z = 0, x \leq 0\}$ , όπως το σχήμα 2.8. Όμοια ορίζουμε  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  με

$$\begin{aligned} g(\theta, \phi) &= (\sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\phi), \cos(\theta), \sin(\phi)) \\ g(V) &= S^2 \setminus C'. \end{aligned}$$

**Πρόταση 2.2.1.** Έστω  $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  διαφορίσιμη ( $U$  ανοιχτό). Το σύνολο  $\{(x, y, f(x, y)) / x, y \in U\}$  είναι κανονική επιφάνεια.

*Απόδειξη.* Θεωρούμε την απεικόνιση  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3 : f(u, v) = (u, v, f(u, v))$ . Θα δείξουμε ότι η  $f$  είναι παραμετρικοποίηση της  $S$  που καλύπτει όλη την  $S$ .

Η συνθήκη (i) του ορισμού ισχύει (διαφορισιμότητα). Για την συνθήκη (iii) έχουμε ότι το διαφορικό ισούτε με:

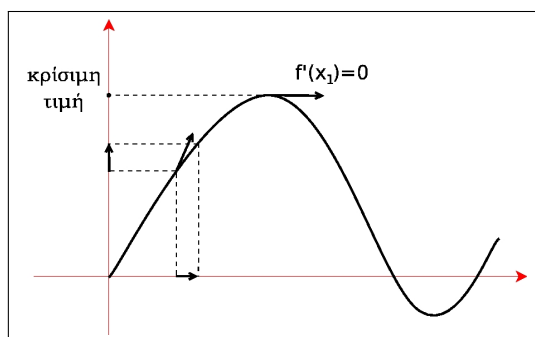
$$df_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1} \\ \boxed{\frac{\partial f}{\partial u}} & \boxed{\frac{\partial f}{\partial v}} \end{pmatrix}.$$

Τώρα αφού αυτά τα δύο διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα έχουμε ότι το  $df_p$  είναι 1-1. Τέλος για την συνθήκη (ii) του ορισμού έχουμε ότι η  $f$  είναι 1-1 διότι  $\forall$  σημείο  $(x, y, z) \in f(U)$ ,  $\exists!$  σημείο  $(x, y) \in U : f(x, y) = (x, y, z)$  (η  $f$  είναι 1-1 αφού τα αρχέτυπα  $(x, y, \dots)$  εμπεριέχονται μέσα στις εικόνες). Άρα  $\exists f^{-1}$  η οποία είναι ίση με τον περιορισμό  $f(U)$  της προβολής  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ . Άρα είναι αμφιδιαφόριση.  $\square$

**Ορισμός 2.2.2.** Έστω  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $U$  ανοιχτό. Θα λέμε ότι το  $p \in U$  είναι **κρίσιμο σημείο** για την  $f$  εάν  $df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  δεν είναι επί. Η εικόνα  $f(p)$  λέγεται **κρίσιμη τιμή** της  $f$ . Εάν ένα σημείο  $q \in \mathbb{R}^m$  δεν είναι κρίσιμη τιμή τότε λέγεται **κανονική τιμή**.

Η ορολογία προέρχεται από την περίπτωση των συναρτήσεων  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και τις ιδιότητες της παραγώγου.

$$f(x_0) \text{ κανονική τιμή } f'(x_0) \neq 0$$



Σχήμα 2.9: παράδειγμα κρίσιμων και κανονικών τιμών

**Παρατήρηση 2.2** (αναγνώριση κανονικών τιμών). Έστω  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  διαφορίσιμη και  $U$  ανοιχτό. Εφαρμόζουμε το διαφορικό της  $f$ ,  $df_p$  στο  $(1, 0, 0)$  για να βρούμε το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης.  $x \rightarrow f(x, y_0, z_0)$  άρα,

$$df_p(1, 0, 0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_p = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0, z_0) \right|_{x=x_0} = f_x.$$

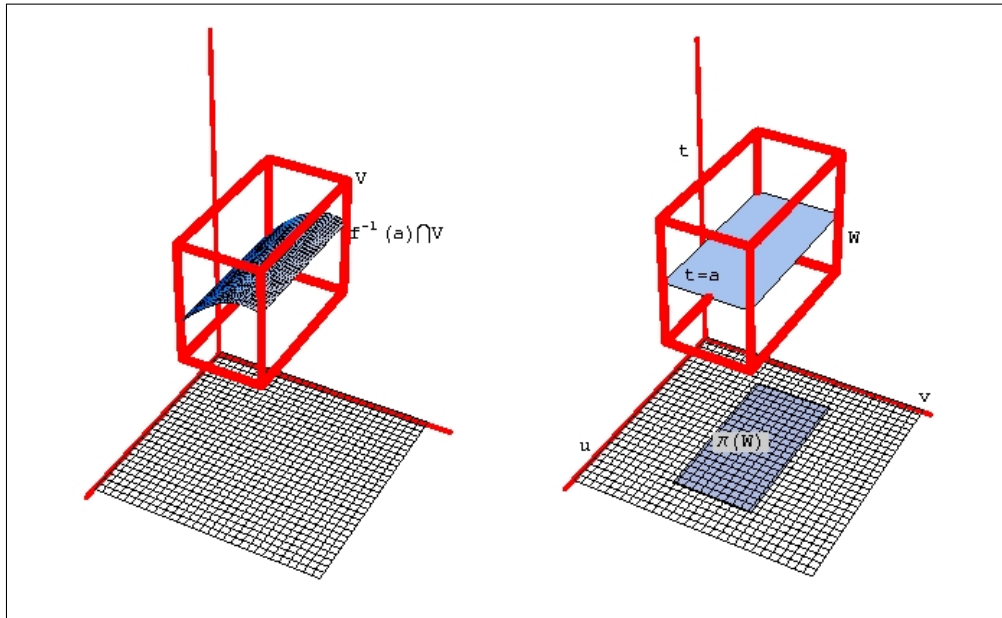
Όμοια  $df_p(0, 1, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y, z_0) = f_y$  και  $df_p(0, 0, 1) = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z) = f_z$ .

Το διαφορικό της  $f$  στο  $p$  είναι ο  $1 \times 3$  πίνακας  $df_p(f_x, f_y, f_z)$ . Για να ίναι επί η  $df_p$  (δεδομένου ότι έχει πεδίο τιμών διάστασης 1) πρέπει και αρκεί τουλάχιστον ένα από τα  $f_x, f_y, f_z$  να είναι  $\neq 0$ . Συνεπώς το  $a \in f(U)$  είναι κανονική τιμή της  $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \Leftrightarrow$  οι  $f_x, f_y, f_z$  δεν μηδενίζονται όλες στο  $f^{-1}(a)$ .

**παράδειγμα 2.6.** Έστω  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ ,  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Το  $0 \in \mathbb{R}$  είναι κανονική τιμή για την  $f$ . Οι  $\begin{pmatrix} f_x = 2x \\ f_y = 2y \\ f_z = 2z \end{pmatrix}$  μηδενίζονται όλες μαζί μόνο στο σημείο  $(0, 0, 0)$  το οποίο όμως δεν ανήκει στο  $f^{-1}(0)$ . Άρα είναι κανονική τιμή.

**Πρόταση 2.2.3.** Έστω  $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  διαφορίσιμη με  $a \in f(U)$  κανονική τιμή για την  $f$ , τότε  $f^{-1}(a)$  είναι κανονική επιφάνεια.

Από προηγούμενη πρόταση υποθέτουμε (αλλάζοντας αν χρειαστεί τους άξονες) ότι  $f_z \neq 0$ . Έστω  $p = (x_0, y_0, z_0) \in f^{-1}(a)$ , ορίζουμε  $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x, y, z) \mapsto F(x, y, f(x, y, z))$ . Το πεδίο ορισμού της  $F$  έχει συντεταγμένες  $x, y, z$  και το πεδίο τιμών της  $u, v, t$ . Το διαφορικό της  $F$  στο  $p$  είναι  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}$  και  $\det(F_p) = f_z \neq 0$  (\*).



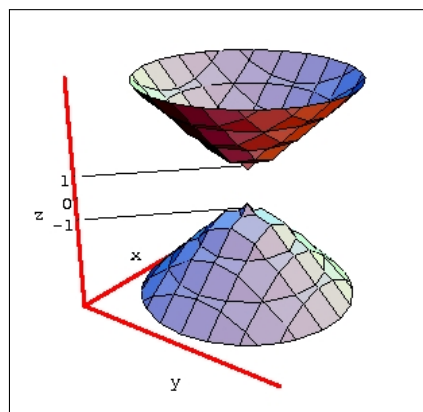
Σχήμα 2.10: Το γράφημα του  $f^{-1} \cap V$  και η προβολή του  $W$

Από την (\*) εφαρμόζεται το θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης το οποίο μας δίνει των περιοχών  $V$  του  $p$  και  $W$  του  $F(p)$  έτσι ώστε  $F : V \rightarrow W$  να είναι αντιστρέψιμη. Αφού  $F^{-1}$  είναι διαφορίσιμη οι συντεταγμένες συναρτήσεις του  $F^{-1}$ ,  $x = u$ ,  $y = v$ ,  $z = g(u, v, t)$ , ( $u, v, t \in W$ ) είναι διαφορίσιμες. Για  $t = a$  έχουμε την συνάρτηση  $z = g(u, v, a) = h(u, v)$  η οποία είναι διαφορίσιμη και έχει πεδίο ορισμού την προβολή του  $W$  στο  $u - v$  επίπεδο. Το  $f^{-1}(a) \cap V$  είναι το γράφημα της  $h$ , άρα είναι κανονική επιφάνεια (σχήμα 2.10).

**παράδειγμα 2.7.** Θα δείξουμε ότι το υπερβολοειδές  $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$  είναι κανονική επιφάνεια. Θεωρώ την συνάρτηση  $f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2 - 1$ .  $(x, y, z) \in f^{-1}(0) \Leftrightarrow (x, y, z)$  ικανοποιεί την εξίσωση  $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ . Το 0 είναι κανονική τιμή για την  $f$  διότι:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z.$$

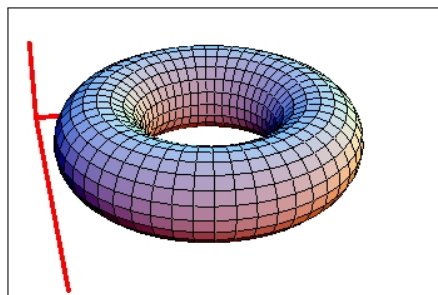
Οι μερικές παράγωγοι μηδενίζονται ταυτόχρονα μόνο στο σημείο  $(0, 0, 0)$  το οποίο δεν ανήκει στο  $f^{-1}(0)$ . Άρα από την πρόταση 2.2.3 που λέει ότι η αντίστροφη εικόνα κανονικής τιμής είναι κανονική επιφάνεια έχουμε το ζητούμενο, ότι δηλαδή το υπερβολοειδές  $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$  είναι κανονική επιφάνεια.



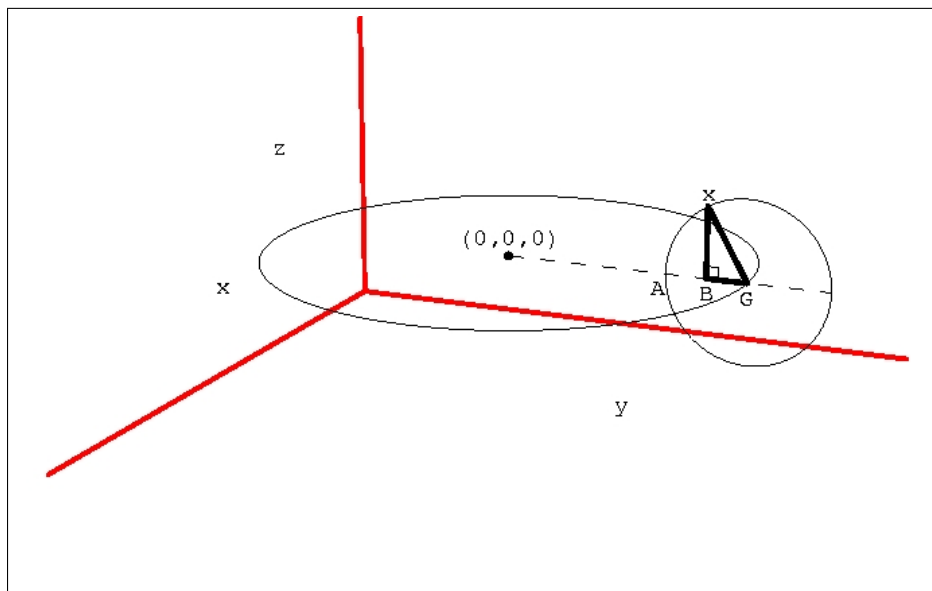
Σχήμα 2.11: το υπερβολοειδές  $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$

**παράδειγμα 2.8** (σπείρα - λουκουμάς - τόρος). Έστω η επιφάνεια  $T$  που γενιέται περιστρέφοντας κύκλο ακτίνας  $r$  γύρω από άξονα που απέχει  $a > r$  από το κέντρο του κύκλου. Θεωρώ την κατασκευη με κύκλο κέντρου  $(0, a, 0)$  ακτίνας  $r$  στο  $y - z$  επίπεδο.

$$(y - a)^2 + z^2 = r^2$$



Σχήμα 2.12: τόρος



Σχήμα 2.13: zoom τόρου

Από το σχήμα 2.13 έχουμε:

$$xB = z, \quad xG = r, \quad BG = OG - OB = a - \sqrt{x^2 + y^2}$$

Άρα  $z^2 = xB^2 - BG^2$  (πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο  $\triangle xBG$ ).

$$z^2 = r^2 - (a - \sqrt{x^2 + y^2})^2 \quad (*)$$

$(x, y, z) \in T \Leftrightarrow (x, y, z)$  ικανοποιεί την (\*).

$$f(x, y, z) = z^2 + (a - \sqrt{x^2 + y^2})^2$$

Τότε  $T = f^{-1}(r^2)$ . Η  $f$  είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο  $(x, y, z)$  για το οποίο  $(x, y) \neq 0$  (οκ, αφού  $zz' \cap T = \emptyset$ ).

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= 2z \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{-2x(a - \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{-2y(a - \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Οι μερικές μηδενίζονται όλες μαζί,

$$\Leftrightarrow (z = 0) \wedge \begin{pmatrix} x = 0 \\ \text{ή} \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y = 0 \\ \text{ή} \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

είτε  $x = y = z = 0$  είτε  $x^2 + y^2 = a^2$ . Κανένα από τα παραπάνω σημεία δεν ανήκει στο  $f^{-1}(r^2)$ , άρα η  $T$  είναι κανονική επιφάνεια.

**Πρόταση 2.2.4** (αντίστροφη πρότασης 2.2.1). Έστω  $S$  κανονική επιφάνεια και  $p \in S$ . Τότε υπάρχει περιοχή  $V$  του  $p$  στο  $S$ , έτσι ώστε η  $V$  να είναι το γράφημα μιας διαφορίσιμης συνάρτησης η οποία έχει μία πό τις παρακάτω μορφές:

$$z = f(x, y), \quad y = g(x, y), \quad x = h(y, z).$$

## 2.2β' Ασκήσεις - Παραδείγματα

**παράδειγμα 2.9.** Έστω  $f(x, y, z) = z^2$ . Το  $0 \in \mathbb{R}$  δεν είναι κανονική τιμή αλλά το  $f^{-1}(0)$  είναι κανονική επιφάνεια.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

Για το σημείο  $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}$  οι μερικές παράγωγοι μηδενίζονται επειδή το σημείο  $(0, 0, 0) \in f^{-1}(0) \Rightarrow 0$  όχι κανονική τιμή.  $f^{-1}(0) = \{(x, y, z) / f(x, y, z) = 0\} = \{(x, y, 0) / x, y \in \mathbb{R}\} = xy$ -επίπεδο, το οποίο είναι κανονική επιφάνεια.

**παράδειγμα 2.10.** Έστω  $f(x, y, z) = (x + y + z - 1)^2$  και  $g(x, y, z) = xyz^2$ . Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία, οι κρίσιμες τιμές και για ποιά  $c$ , τα σύνολα  $f^{-1}(c)$  και  $g^{-1}(c)$  είναι κανονικές επιφάνειες.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x + y + z - 1) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Τα σημεία στα οποία μηδενίζονται όλες οι μερικές παράγωγοι είναι τα σημεία του επιπέδου  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z - 1 = 0\}$  (κρίσιμα σημεία). Το  $0$  δεν είναι κανονική τιμή αφού  $f(\text{ενός σημείου της } E) = 0$ .  $f^{-1}(0) =$  το επίπεδο  $E$ , άρα  $f^{-1}(0)$  είναι κανονική επιφάνεια.  $f^{-1}(c), (c \geq 0)$ , είναι εξίσωση επιφάνειας (δηλαδή επιπέδου).

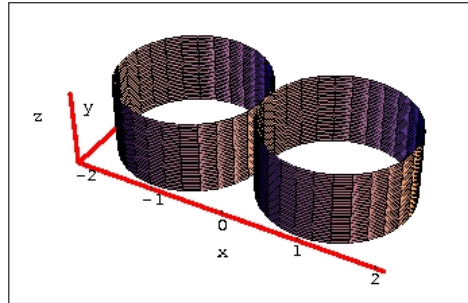
$$\frac{\partial g}{\partial x} = yz^2, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = xz^2, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 2xyz$$

Τα σημεία  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  τα οποία μηδενίζουν ταυτόχρονα όλες τις μερικές παραγώγους είναι οι άξωνες  $xx' \vee yy' \vee zz'$ . Η μοναδική κρίσιμη τιμή είναι το

0. Τα κρίσιμα σημεία είναι οι άξονες  $xx' \vee yy' \vee zz'$  και οι κανονικές τιμές είναι τα σημεία που ανήκουν στο σύνολο  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Το  $g^{-1}(0)$  δεν είναι επιφάνεια και το  $g^{-1}(c)$  είναι κανονική επιφάνεια  $\forall c \neq 0$ .

$\longleftrightarrow$



Σχήμα 2.14:  $(x + 1)^2 + y^2 = 1 \cup (x - 1)^2 + y^2 = 1$

Για κάθε σημείο  $(0, 0, z)$  δεν έχει σύστημα συντεταγμένων.

**παράδειγμα 2.11.** Θα δείξουμε ότι  $f(u, v) = (\sinh(u) \cos(v), \sinh(u) \sin(v), \cosh(u))$  είναι σύστημα συντεταγμένων για το υπερβολοειδές  $1 + x^2 + y^2 = z^2$  (σχήμα 2.11).

Κοιτάμε αν  $f(u, v)$  ανήκει στο υπερβολοειδές.

$$\sinh^2(u) \cos^2(v) + \sinh^2(u) \sin^2(v) + 1 = \cosh^2(u)$$

$$\sinh^2(u)(\cos^2(v) + \sin^2(v)) + 1 = \cosh^2(u)$$

$$\sinh^2(u) + 1 = \cosh^2(u) \quad (\text{ισχύει})$$

Άρα ανήκει στο υπερβολοειδές.

Κοιτάμε αν η  $f$  είναι 1-1. Έστω  $(u, v), (u', v')$  έτσι ώστε  $f(u, v) = f(u', v')$ . Τότε,

$$\sinh(u) \cos(v) = \sinh(u') \cos(v')$$

$$\sinh(u) \sin(v) = \sinh(u') \sin(v')$$

$$\cosh(u) = \cosh(u')$$

Από την τρίτη εξίσωση έχουμε ότι,  $u = \pm u'$ .

(i) Αν  $u = u'$  έχουμε ότι:

$$\cos(v) = \cos(v') \quad \text{και} \quad \sin(v) = \sin(v')$$

$$\text{άρα } v = v' \Rightarrow u = u' \quad \text{και} \quad v = v'$$

Άρα η  $f$  είναι 1-1.

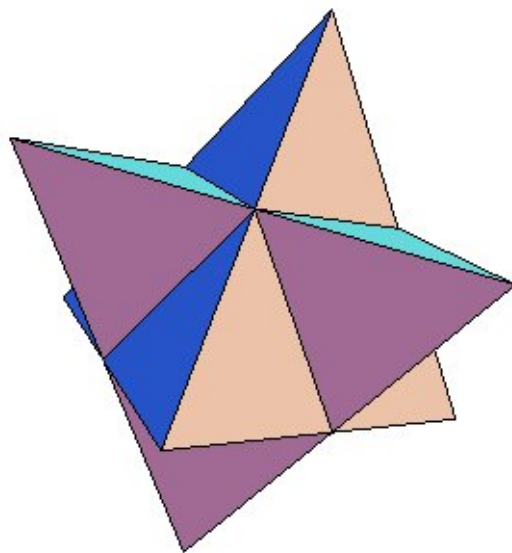


(ii) Αν  $u = -u'$  έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\sinh(u) \sin(v) &= -\sinh(u) \sin(v') \\ \Rightarrow u &= 0 \quad (\text{άτοπο})\end{aligned}$$

Άρα  $u = u'$  και η  $f$  είναι 1-1.

Τέλος κοιτάμε αν είναι επί. Έστω  $(x, y, z) \in S^+$ . Για τυχαίο  $z > 0 \exists$  μοναδικός αριθμός  $u$  τέτοιος ώστε  $\cosh(u) = z$ . Το  $V$  καθορίζεται μοναδικά.



# ΣΧΗΜΑΤΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟ Mathematica 5.2

---

Παρακάτω υπάρχει ο κώδικας των σχημάτων που σχεδιάστηκαν με το πρόγραμμα Mathematica 5.2. Τα σχήματα που λείπουν έχουν σχεδιαστεί με το πρόγραμμα Dia-Diagram.

## ΓΡΑΦΙΚΟ 1

```
f[t.]:= {Cos[t], Sin[t],  $\frac{t}{8}$ };
sx1 = ParametricPlot3D[f[t], {t, -9, 9}, Boxed->False,
Axes->False, ImageSize -> 200,
DisplayFunction -> Identity];
tanu[u_] = Simplify [∂uf[u]];
tanv[u_] = Simplify[f''[u]];
tanvectors[u.]:=
{Arrow[tanv[u], Tail -> f[u],
RGBColor[Random[], Random[], Random[]]]};
Show[sx1, Table[tanvectors[s], {s, -8, 8, .1}],
DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

## ΓΡΑΦΙΚΟ 2

```
<< GraphicsPlotField3D
PlotVectorField3D[{x, y, z}, {x, 0, 2}, {y, 0, 2},
{z, 0, 2}, PlotPoints -> 5, VectorHeads -> True,
```

```
Boxed → False, ColorFunction → Hue,  
ViewPoint->{2.233, -2.259, 1.168}
```

### ΓΡΑΦΙΚΟ 3

```
<< Graphics`Polyhedra`  
Show[Stellate[Polyhedron[Octahedron], 3], Boxed → False,  
ViewPoint->{0.667, 1.340, 3.034}, ImageSize → 250];
```

### ΣΧΗΜΑ 1.1

```
ParametricPlot3D [{Cos[t], Sin[t],  $\frac{t}{4}$ }, {t, -5, 10},  
Boxed → False, Ticks → {{0}, {0}, {}}, AxesLabel → {x, y, z},  
AxesStyle → {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.015]},  
ImageSize → 90];
```

### ΣΧΗΜΑ 1.2

```
ParametricPlot3D [{ $e^t$ ,  $e^{-t}$ , 2t}, {t, -3, 3}, Boxed → True,  
ViewPoint → {1.888, 2.633, .975}, Ticks → {{0}, {0}, {0}},  
AxesLabel → {x, y, z},  
BoxStyle → {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]},  
AxesStyle → {RGBColor[1, 0, 0]}];
```

### ΣΧΗΜΑ 1.3

```
<< Graphics`Arrow`  
sx1 = ParametricPlot [{ $t^3 - 4t$ ,  $t^2 - 4$ }, {t, -4.5, 4.5},  
Ticks->{{-5, 5}, {2, -2, -4}}, AxesLabel->{x, y},  
AxesStyle->{RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]},  
DisplayFunction → Identity];  
Show[sx1, Graphics[{Hue[0], Arrow[{-9, 2}, {-5, .7}]}],  
Graphics[{Hue[0], Arrow[{5, .7}, {9, 2}]}],  
DisplayFunction :→ $DisplayFunction, AspectRatio → 1];
```

### ΣΧΗΜΑ 1.4

```

ParametricPlot[{Cos[t], Sin[t]}, {t, -4, 4},
Ticks → {{-1, -.5, .5, 1}, {-1, -.5, .5, 1}},
AxesStyle → {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[.01]},
AspectRatio → 1, AxesLabel → {x, y};

```

#### ΣXHMA 1.5

```

sx1 = ParametricPlot[{t, t^3}, {t, 0, 2.2}, Ticks → {{1, 2}, {}},
DisplayFunction :→ Identity];
Show[sx1,
Graphics[{Dashing[{0.01, 0.01}], Line[{{1, 0}, {1, 1}}]}],
Graphics[{Dashing[{0.015, 0.02}], Line[{{2, 0}, {2, 2^3}}]}],
AxesStyle → {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[.01]},
AxesLabel → {x, y}, DisplayFunction :→ $DisplayFunction];

```

#### ΣXHMA 1.6

```

sx = ParametricPlot[{t - Sin[t], 1 - Cos[t]}, {t, 0, 6π},
DisplayFunction :→ Identity];
sx1 = ParametricPlot[{Sin[t], Cos[t] + 1}, {t, -4, 4}, AxesOrigin → {0, 0},
DisplayFunction :→ Identity];
sx2 = ParametricPlot[{Sin[t] + 1.5, Cos[t] + 1}, {t, -4, 4},
AxesOrigin → {0, 0}, DisplayFunction :→ Identity];
Show[sx, sx1, sx2, AspectRatio → 0.5, Ticks → {{}, {}},
AxesStyle → {{RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.02]},
{RGBColor[1, 0, 0], Thickness[.004]}}},
DisplayFunction :→ $DisplayFunction];

```

#### ΣXHMA 1.7

```

sx1 = ParametricPlot[{t - Sin[t], 1 - Cos[t]}, {t, 0, 3},
Ticks → {{}, {}}, DisplayFunction :→ Identity];
sx2 = ParametricPlot[{Cos[t] + 1.2, Sin[t] + 1}, {t, 0, 2π},
DisplayFunction :→ Identity];
lin1 = Show[Graphics[Line[{{1.2, 0}, {1.2, 1}}]]],
DisplayFunction :→ Identity];
sx3 = ParametricPlot[{Cos[t], Sin[t] + 1}, {t, 0, 2π},
DisplayFunction :→ Identity];

```

```

lin2 = Show[Graphics[Line[{{0.2, 0.5}, {1.5, 1}}]],
DisplayFunction :→ Identity];
lin2 = Show[Graphics[Line[{{0.28, 0.64}, {1.2, 1}}]],
DisplayFunction → Identity];
lin3 = Show[Graphics[Line[{{0.28, 0.64}, {1.2, 0.64}}]],
DisplayFunction → Identity];
lin4 = Show[Graphics[Line[{{0.28, 0.64}, {0.28, 0}}]],
DisplayFunction → Identity];
gr1 = Show[Graphics[Text["E", {1.4, 1}]],
DisplayFunction → Identity];
gr2 = Show[Graphics[Text["D", {1.4, 0.7}]],
DisplayFunction → Identity];
gr3 = Show[Graphics[Text["A", {0.3, 0.85}]],
DisplayFunction → Identity];
gr4 = Show[Graphics[Text["B", {0.3, -0.1}]],
DisplayFunction → Identity];
gr5 = Show[Graphics[Text["O", {-0.1, -0.1}]],
DisplayFunction → Identity];
gr6 = Show[Graphics[Text["t", {1.1, 0.85}]],
DisplayFunction → Identity];
gr7 = Show[Graphics[Text["G", {1.4, -0.1}]],
DisplayFunction → Identity];
Show[sx1, sx2, sx3, lin1, lin2, lin3, lin4, gr4, gr2, gr1, gr3,
gr5, gr6, gr7, AspectRatio → Automatic,
AxesStyle → {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]},
DisplayFunction :→ $DisplayFunction];

```

## ΣXHMA 1.8

```

sx1 = Plot[Cosh[x], {x, -3, 3},
Epilog → {Text["Cosh", {-2.3, 3}]},
DisplayFunction → Identity];
sx2 = Plot[Sinh[x], {x, -3, 3}, DisplayFunction → Identity];
sxhmata = Show[sx1, sx2, Graphics[Text["Sinh", {-1, -2.5}]],
Ticks → {{}, {}},
AxesStyle → {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[.01]},
DisplayFunction :→ $DisplayFunction];
sx3 = ParametricPlot3D[{Cosh[t], Sinh[t], t}, {t, -3, 3},
ViewPoint->{1.208, 3.007, 0.975}, Ticks → {{}, {}, {}},
BoxStyle → {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]},

```

```

AxesStyle → {RGBColor[1, 0, 0]};
Show[GraphicsArray[{sxhmata, sx3}]];

```

### ΣXHMA 1.9

```

ParametricPlot[{e-tCos[5t], e-tSin[5t]}, {t, 0, 4},
Ticks → {{}, {}}, AspectRatio → Automatic,
AxesStyle → {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]};

```

### ΣXHMA 1.16

```

sx1 = ParametricPlot3D[{t, 0, e-t}, {t, 0.01, 2},
DisplayFunction → Identity];
sx2 = ParametricPlot3D[{t, e-t, 0}, {t, -2, -0.01},
DisplayFunction → Identity];
Show[sx1, sx2, DisplayFunction :→ $DisplayFunction,
ViewPoint->{2.616, -1.912, 0.975},
Ticks → {{0}, {0}, {0}}, AxesLabel → {x, y, z},
BoxStyle → {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]},
AxesStyle → {RGBColor[1, 0, 0]};

```

### ΣXHMA 1.18

```

f[t.]:= {Cos[t], Sin[t], t/4}
tanu[u_] = Simplify[∂uf[u]];
tanv[u_] = Simplify[{-Cos[u/√(1+1/16)], -Sin[u/√(1+1/16)], 0}];
dianb[u_] =
Simplify[{-1/4 Sin[u/√(1+1/16)], 1/4 Cos[u/√(1+1/16)], 1/√(1+1/16)}];
tanvectors[u.]:= {Arrow[tanu[u], Tail → f[u], Red],
Arrow[tanv[u], Tail → f[u], Blue],
Arrow[dianb[u], Tail → f[u], RGBColor[0, 1, 0]]};
Show[sx1, tanvectors[-2], ImageSize → 300];

```

### ΣXHMA 1.19

```

ParametricPlot3D  $\left[ \left\{ \frac{(1+s)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{(1-s)^{\frac{3}{2}}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}} \right\}, \right.$ 
{s, -1, 1}, Ticks  $\rightarrow$  {{}, {}, {}},
BoxStyle  $\rightarrow$  {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[.01]},
AxesStyle  $\rightarrow$  {RGBColor[1, 0, 0]};

```

### ΣΧΗΜΑ 2.3

```

<< GraphicsInequalityGraphics
<< GraphicsShapes
sx1 = ParametricPlot3D[{Cos[v]Sin[u], Sin[v]Sin[u], Cos[u]}, {v, 0, 2π},
{u, 0, π}, DisplayFunction  $\rightarrow$  Identity];
sx2 = InequalityPlot3D  $[x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge -.001 < z < .001, \{x\}, \{y\},$ 
{z}, Axes $\rightarrow$ False, DisplayFunction  $\rightarrow$  Identity];
sx3 = Plot3D[0, {x, -1.5, 1.5}, {y, -1.5, 1.5}, Boxed  $\rightarrow$  False,
Axes  $\rightarrow$  False, ColorFunction  $\rightarrow$  GrayLevel, DisplayFunction  $\rightarrow$  Identity];
Show[WireFrame[sx1], sx2, WireFrame[sx3],
DisplayFunction  $\rightarrow$  $DisplayFunction, ViewPoint $\rightarrow$ {1.844, 2.802, 0.447},
Boxed  $\rightarrow$  False, Axes  $\rightarrow$  False, AspectRatio  $\rightarrow$  Automatic, ImageSize  $\rightarrow$  500];

```

### ΣΧΗΜΑ 2.5

```

<< GraphicsInequalityGraphics
ComplexInequalityPlot[Abs[z]  $\leq$  1, {z},
Ticks  $\rightarrow$  {{-1, -.5, .5, 1}, {-1, -.5, .5, 1}}];
sx1 = ParametricPlot3D[{Cos[θ]Sin[φ], Sin[θ]Sin[φ], Cos[φ]},
{θ, 0, 2Pi}, {φ, 0, Pi/2}];
tanvectors = {Arrow[{1.5, 0, 0}, Tail  $\rightarrow$  {0, 0, 0}, Thickness[.007]],
Arrow[{0, 1.5, 0}, Tail  $\rightarrow$  {0, 0, 0}, Thickness[.007]],
Arrow[{0, 0, 1.5}, Tail  $\rightarrow$  {0, 0, 0}, Thickness[.007]}}];
Show[sx1, tanvectors, ViewPoint $\rightarrow$ {2.915, 1.539, -0.764}, Boxed  $\rightarrow$  False,
Axes  $\rightarrow$  False, ImageSize  $\rightarrow$  600];

```

### ΣΧΗΜΑ 2.6

```

sx1 = ParametricPlot3D[{Cos[θ]Sin[φ], Sin[θ]Sin[φ], Cos[φ]}, {θ, 0, 2Pi},
{φ, 0, Pi}, DisplayFunction  $\rightarrow$  Identity];
g1[x_, y_] = 4 - x2 - y2;
{x[u_, v_], y[u_, v_]} = {uCos[v], uSin[v]};
P1[u_, v_] = {x[u, v], y[u, v], g1[x[u, v], y[u, v]]};

```



```

sx2 = ParametricPlot3D[P1[u, v], {u, 0, 1}, {v, 0, 2π},
DisplayFunction :→ Identity];
g2[x_, y_] = -4 + x2 + y2;
{x[u_, v_], y[u_, v_]} = {uCos[v], uSin[v]};
P2[u_, v_] = {x[u, v], y[u, v], g2[x[u, v], y[u, v]]};
sx3 = ParametricPlot3D[P2[u, v], {u, 0, 1}, {v, 0, 2π},
DisplayFunction :→ Identity];
g3[x_, y_] = -4 + x2 + y2;
{x[u_, v_], y[u_, v_]} = {uCos[v], uSin[v]};
P3[u_, v_] = {x[u, v], g3[x[u, v], y[u, v]], y[u, v]};
sx4 = ParametricPlot3D[P3[u, v], {u, 0, 1}, {v, 0, 2π},
DisplayFunction :→ Identity];
g4[x_, y_] = 4 - x2 - y2;
{x[u_, v_], y[u_, v_]} = {uCos[v], uSin[v]};
P4[u_, v_] = {x[u, v], g4[x[u, v], y[u, v]], y[u, v]};
sx5 = ParametricPlot3D[P4[u, v], {u, 0, 1}, {v, 0, 2π},
DisplayFunction :→ Identity];
g5[x_, y_] = 4 - x2 - y2;
{x[u_, v_], y[u_, v_]} = {uCos[v], uSin[v]};
P5[u_, v_] = {g5[x[u, v], y[u, v]], x[u, v], y[u, v]};
sx6 = ParametricPlot3D[P5[u, v], {u, 0, 1}, {v, 0, 2π},
DisplayFunction :→ Identity];
g6[x_, y_] = -4 + x2 + y2;
{x[u_, v_], y[u_, v_]} = {uCos[v], uSin[v]};
P6[u_, v_] = {g6[x[u, v], y[u, v]], x[u, v], y[u, v]};
sx7 = ParametricPlot3D[P6[u, v], {u, 0, 1}, {v, 0, 2π},
DisplayFunction :→ Identity];
tanvectors = {Arrow[{1.5, 0, 0}, Tail → {0, 0, 0}, Thickness[.007]],
Arrow[{0, 1.5, 0}, Tail → {0, 0, 0}, Thickness[.007]],
Arrow[{0, 0, 1.5}, Tail → {0, 0, 0}, Thickness[.007]],
Arrow[{0, 0, -1.5}, Tail → {0, 0, 0}, Thickness[.007]],
Arrow[{-1.5, 0, 0}, Tail → {0, 0, 0}, Thickness[.007]],
Arrow[{0, -1.5, 0}, Tail → {0, 0, 0}, Thickness[.007]}};
Show[sx1, sx2, sx3, sx4, sx5, sx6, sx7, tanvectors, Boxed → False,
Axes → False, DisplayFunction :→ $DisplayFunction, ImageSize → 800];

```

## ΣXHMA 2.8

```

<< Graphics`Shapes`
sx1 = ParametricPlot3D[{Cos[t]Sin[s], 0, Cos[s]}, {t, 0, 2π}, {s, 0, π},

```

```

PlotPoints → 50, ViewPoint->{2.797, 1.336, 1.356},
DisplayFunction :→ Identity];
sx2 = ParametricPlot3D[{Cos[t]Sin[s], Sin[t]Sin[s], 0}, {t, 0, 2π},
{s, 0, π}, PlotPoints → 60, DisplayFunction :→ Identity];
Show[sx1, sx2, Graphics3D[Text["y-axis", {.5, 1.6, 0}]],
Graphics3D[Text["x-axis", {1, -.9, -.7}]],
Graphics3D[Text["z-axis", {-1.2, -.6, 1}]],
Graphics3D[Text["C", {-1.2, -.3, .7}]],
Graphics3D[Text["C'", {-1.2, .7, -.2}]],
WireFrame[Graphics3D[Sphere[1]]], Boxed → False,
TextStyle → {FontSize → 22}, AxesEdge → {{-1, -1},
{-1, -1}, {-1, -1}}, Ticks → {{0, 1}, {0, 1}, {}},
ImageSize → 600, DisplayFunction → $DisplayFunction,
AxesStyle → {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]}}];

```

## ΣXHMA 2.10

```

<< Graphics`Shapes`
<< Graphics`Colors`
sx1 = Show[box[{0, 2}, {-1, 3}, {4, 7}], DisplayFunction → Identity];
setup3[z0.] := Graphics3D[Polygon[{{0, -1, z0}, {2, -1, z0}, {2, 3, z0},
{0, 3, z0}, {0, -1, z0}}]];
sx2 = ParametricPlot3D[{t, s, 0}, {t, -2, 4}, {s, -2, 4},
DisplayFunction → Identity];
protosxhma = Show[sx1, setup3[5.5], setup3[0], WireFrame[sx2],
Graphics3D[Text["u", {-1.6, -2, 1.2}]],
Graphics3D[Text["v", {4, 4, 0.4}]],
Graphics3D[Text["t", {0, 0, 8}]],
Graphics3D[Text["t=a", {0.2, 0.2, 5}]],
Graphics3D[Text["π(W)", {.7, .9, 0}], Background → GrayLevel[.8]],
Graphics3D[Text["W", {3.6, 0.2, 7}], Boxed → False,
Axes → True, AxesEdge → {{1, -1}, {-1, -1}, {-1, 1}},
Ticks → {{}, {}, {}}, ImageSize → 300, TextStyle → {FontSize → 10},
AxesStyle → {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]},
DisplayFunction :→ Identity];
sx3 = ParametricPlot3D[{t, s, Sin[t] + 5}, {t, 0, 2}, {s, -1, 3},
DisplayFunction:→Identity];
deyterosxhma = Show[sx1, sx3, WireFrame[sx2],
Graphics3D[Text["V", {3.6, 0.2, 9}]],
Graphics3D[Text["f-1(a)∩V", {4.4, 0.2, 8}], Boxed->False,

```

```

Axes → True, AxesEdge->{{1, -1}, {-1, -1}, {-1, 1}},
Ticks->{{}, {}, {}}, ImageSize → 300, TextStyle->{FontSize → 10},
AxesStyle->{RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]},
DisplayFunction :→ Identity];
Show[GraphicsArray[{deyterosxhma, protosxhma}], ImageSize → 600,
DisplayFunction :→ $DisplayFunction];

```

### ΣXHMA 2.11

```

<< Graphics`ContourPlot3D
sx1 = ContourPlot3D[-x2 - y2 + z2 - 1, {x, -5, 5},
{y, -5, 5}, {z, -5, 5}, PlotPoints → {3, 5},
Boxed → False, Axes → True,
Ticks → {{}, {}, {-1, 0, 1}},
AxesEdge → {{1, -1}, {-1, -1}, {-1, 1}},
AxesLabel → {x, y, z},
ViewPoint->{-2.568, -1.784, 1.294},
DisplayFunction → Identity];
Show[sx1,
Graphics3D[Line[{{-5, 5, -1}, {0, 0, -1}}]],
Graphics3D[Line[{{-5, 5, 1}, {0, 0, 1}}]],
Graphics3D[Text["x", {-2, 5, -4}]],
AxesStyle → {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]},
DisplayFunction :→ $DisplayFunction];

```

### ΣXHMA 2.12

```

<< Graphics`Shapes
Show[Graphics3D[Torus[2.5, 1]], Boxed → False,
Axes → True, AxesEdge → {{1, -1}, {-1, -1}, {-1, 1}},
Ticks → {{}, {}, {}},
AxesStyle → {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]},
ViewPoint->{-0.654, -2.876, 1.659}];

```

### ΣXHMA 2.13

```

sx1 = ParametricPlot3D[{0, Cos[t] + 3, Sin[t]}, {t, -π, π},
PlotRange → {{-4, 4}, {-4, 4}, {-2, 2}}, AxesLabel → {x, y, z},
Boxed → False, AxesEdge → {{-1, -1}, {-1, -1}, {-1, -1}},
ViewPoint->{2.995, 1.286, 0.910},

```

```

DisplayFunction → Identity];
sx2 = ParametricPlot3D[{3Sin[s], 3Cos[s], 0}, {s, -π, π},
DisplayFunction :→ Identity];
protosxhma = Show[sx1, sx2,
Graphics3D[{Dashing[{0.017, 0.018}],
Line[{{0, 0, 0}, {0, 4, 0}}]}],
Graphics3D[{Thickness[0.006],
Line[{{0, Cos[3 $\frac{\pi}{4.5}$ ] + 3, Sin[3 $\frac{\pi}{4.5}$ ]} , {0, 3, 0}}]}],
Graphics3D[{Thickness[0.006],
Line[{{0, Cos[3 $\frac{\pi}{4.5}$ ] + 3, Sin[3 $\frac{\pi}{4.5}$ ]} ,
{0, Cos[3 $\frac{\pi}{4.5}$ ] + 3, 0}}]}],
Graphics3D[{Thickness[0.006],
Line[{{0, 3, 0}, {0, Cos[3 $\frac{\pi}{4.5}$ ] + 3, 0}}]}],
Graphics3D[
Line[{{0, Cos[3 $\frac{\pi}{4.5}$ ] + 3.15, .15} ,
{0, Cos[3 $\frac{\pi}{4.5}$ ] + 3, 0.15}}]}],
Graphics3D[
Line[{{0, Cos[3 $\frac{\pi}{4.5}$ ] + 3.15, .15} ,
{0, Cos[3 $\frac{\pi}{4.5}$ ] + 3.15, 0}}]}],
Graphics3D[Point[{0, 0, 0}]],
Graphics3D[Text["(0,0,0)", {0, 0, 0.2}]],
Graphics3D[Text["A", {0, 1.9, -0.2}]],
Graphics3D[Text["B", {0, 2.5, -0.2}]],
Graphics3D[Text["G", {0, 3, -0.2}]],
Graphics3D[Text["x", {0, 2.5, 1}]],
Axes → True, Ticks → {{}, {}, {}},
DisplayFunction :→ $DisplayFunction, ImageSize → 600,
TextStyle → {FontSize → 13},
AxesStyle → {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.005]};

```

## ΣXHMA 2.14

```

sx1 = ParametricPlot3D[{Cos[t] + 1, Sin[t], s}, {t, -π, π},
{s, 0, 1}, DisplayFunction :→ Identity];
sx2 = ParametricPlot3D[{Cos[t] - 1, Sin[t], s}, {t, -π, π},
{s, 0, 1}, DisplayFunction :→ Identity];
Show[sx1, sx2, Boxed → False,
AxesEdge → {{-1, -1}, {-1, -1}, {-1, -1}},
Ticks → {{-2, -1, 0, 1, 2}, {}, {}}, AxesLabel → {x, y, z},
AxesStyle → {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.01]},

```

**DisplayFunction**  $\rightarrow$  **\$DisplayFunction**];



## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

---

- [1] Στοιχειώδης διαφορική γεωμετρία. Ο'neil.
- [2] Διαφορική γεωμετρία. Μάλλιος.
- [3] *Modern differential geometry of curves and surfaces*. Singer, Thorpe.
- [4] *Differential geometry (βασισμένο σε Mathematica και Maple)*. Alfred Grey.
- [5] *Riemman geometry*. Gallot, Hulin, La Fontaine. προχωρημένο βιβλίο.





# ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

---

αμφιδιαφόριση, 29  
απλή, 21

διαφορίσιμη συνάρτηση, 3, 21  
διαφορικό, 26  
δικάθετο διάνυσμα, 15

επίπεδο κίνησης, 15  
εξωτερικό γινόμενο, 11

ιδιάζων σημείο, 5  
ιχνος της καμπύλης, 3

κύριο κάθετο, 14  
καμπυλότητα, 13  
κανονική επιφάνεια, 30, 34, 36  
κανονική καμπύλη, 5  
κανονική τιμή, 35  
κλειστή καμπύλη, 21  
κρίσιμη τιμή, 35  
κρίσιμο σημείο, 35

λεία συνάρτηση, 3

μήκος τόξου, 6

παραμετρικοποίηση, 30  
παραμετρικοποιημένη καμπύλη, 3

σύστημα συντεταγμένων, 30  
σημείο ιδιομορφίας, 5, 15

συστροφή, 16

τρίεδρο Frenet, 17

◇  
Οι  
ση-  
μειώσεις  
της διαφορι-  
κής γεωμετρίας  
στοιχειοθετήθηκαν  
με το L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>. Το  
υπολογιστικό περιβάλλον  
ήταν Linux. Η βιβλιογραφία  
κατασκευάστηκε με το BIB<sub>T</sub>E<sub>X</sub> και  
το ευρετήριο με το MAKEINDEX. Τα  
μαθηματικά σχεδιαγράμματα  
έγιναν με το mathematica  
5.2 και το Dia-Diagram.  
Η επεξεργασία του  
κειμένου έγινε  
με το πρό-  
γραμμα  
kile  
1.9.3  
◇